

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Cálculo de alas en régimen no estacionario y compresible subsónico

Autor: Miguel Ángel Muñoz de la Torre

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Cálculo de alas en régimen no estacionario y compresible subsónico

Autor:

Miguel Ángel Muñoz de la Torre

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Cálculo de alas en régimen no estacionario y compresible subsónico

Autor: Miguel Ángel Muñoz de la Torre

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi madre, mi padre y mi hermana

Agradecimientos

*Todos nuestros sueños se pueden hacer realidad si
tenemos el coraje de perseguirlos.*

- Walt Disney -

Quisiera agradecer en primer lugar a mi familia por su apoyo incondicional, no solo durante estos cuatro años de grado, sino durante toda la vida. Todos han confiado en mí, en especial mi madre, mi padre y mi hermana, los cuales han estado a mi lado en todo momento. Ha habido situaciones difíciles, momentos de desesperación, pero con vuestra ayuda he sabido seguir adelante y poder con cualquier problema que se me planteaba. Sin vosotros esto no sería posible. Gracias.

También agradecer a esa segunda familia, mis amigos, por haber soportado mis cosas durante estos cuatro años (y los que os quedan). Realizar este camino acompañado ha sido mucho más ameno. Sois lo mejor que me llevo de estos cuatro años. Agradecer especialmente a Paco, mi mano derecha. Se nos metió entre ceja y ceja que acabaríamos la carrera en cuatro años, y lo hemos conseguido. Contigo he compartido todas las horas de estudio, todas las victorias y derrotas, pero, sobre todo, todas las risas. Has pasado a ser como un hermano para mí. Gracias.

Mencionar también a mis profesores. Desde los comienzos en el Centro Docente María, hasta llegar a la Escuela Superior de Ingeniería, pasando por el I.E.S. Juan de Mairena, he tenido la suerte de rodearme de muy buenos profesores. La mayoría, además de formarme académicamente, contribuyeron con su grano de arena en crear la persona que soy hoy en día. Agradecer especialmente a Don Miguel Pérez-Saborid por todo su apoyo y ayuda, sin la cual esto no sería posible. Aunque ha sido complicado, me alegro enormemente de la decisión que tomé al elegir este proyecto. Gracias.

A los que ya no están. Todo este esfuerzo va por vosotros. Gracias

*Miguel Ángel Muñoz de la Torre
Grado en Ingeniería Aeroespacial
Sevilla, 2017*

Resumen

El objetivo de este proyecto es la implementación del Doublet Point Method con MATLAB para el estudio de la aerodinámica no estacionaria de alas. Este método fue desarrollado por T. Ueda y E. H. Dowell y expuesto en su ensayo “A New Solution Method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow”, en el cual lo describen como simple y completo por permitir analizar alas en régimen no estacionario, estacionario, compresible e incompresible.

En definitiva, se pretende analizar un método distinto al utilizado comúnmente, el Vortex Lattice, que cubra todas las posibilidades del régimen subsónico, y que permita calcular los problemas básicos de la aerodinámica no estacionaria, con vistas a un futuro acoplamiento con las fuerzas elásticas e inerciales y, en general, con la aeroelasticidad.

Abstract

The aim of this project is to program the Doublet Point Method with MATLAB in order to study the unsteady aerodynamics of wings. This method was developed by T. Ueda and E. H. Dowell, and published within their report “A New Solution Method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow”, in which they describe the method as simple and complete, due to the fact that it allows you to analyse the steady and unsteady states, and the compressible and incompressible flows.

Lastly, it is expected to analyse a different method from the one commonly used, the Vortex Lattice Method, which covers all the possibilities of the subsonic flow, and permits you to calculate the classic problems of the unsteady aerodynamics, to be able to eventually join with the elastic and inertial forces and, overall, with aeroelasticity.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
Notación	xxiii
1 Introducción	1
1.1. <i>Objetivos y estructura del trabajo</i>	3
1.2. <i>MATLAB</i>	4
1.3. <i>Definición de la geometría</i>	5
2 Fundamentos teóricos	7
2.1. <i>Linealización de las ecuaciones. Ecuación de ondas</i>	9
2.2. <i>Condiciones de contorno</i>	13
2.3. <i>Solución en el dominio de la frecuencia. Ecuación de Possio</i>	15
2.4. <i>Doublet Point Method</i>	18
2.5. <i>Respuesta en el tiempo ante una entrada cualquiera</i>	22
3 Optimización del método	25
3.1. <i>Vectorización. Panelado geométrico</i>	25
3.2. <i>Truncamiento</i>	29
3.3. <i>Factores de Lanczos</i>	31
4 Resultados	35
4.1. <i>Comparación con resultados obtenidos por Ueda - Dowell</i>	35
4.2. <i>Comparación con el Vortex Lattice Method</i>	40
4.3. <i>Problemas clásicos de la aeroelasticidad</i>	43
4.3.1. <i>Problema de Wagner</i>	43
4.3.2. <i>Problema de Küssner</i>	51
4.4. <i>Respuesta ante una entrada cualquiera</i>	55
5 Conclusiones y líneas futuras de investigación	59
Anexo A. Transformada de Fourier	61
<i>DFT y FFT</i>	63
Anexo B. Fórmula de Green	65
<i>Ecuación de Laplace</i>	65

<i>Ecuación de Helmholtz</i>	67
Anexo C. Singularidad de la función Kernel. Aproximación Ueda – Dowell	69
Anexo D. Códigos MATLAB	73
<i>Doublet Point Method</i>	73
<i>Funciones auxiliares: Br, Bi, U</i>	76
Referencias	79

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1. Comparación de tiempos de duración del método con bucles vs método vectorizado. En rojo los tiempos sin optimizar, en verde optimizados.	26
Tabla 3-2. Estudio de sensibilidad Número de paneles vs tiempo de ejecución del programa optimizado.	27
Tabla 3-3. Modificación del panelado. Relación $N_y = N_x \cdot AR$.	27
Tabla 4-1. Resultados mostrados en Figura 4-9.	41
Tabla 4-2. Coeficiente de sustentación estacionario ante un cambio repentino en el ángulo de ataque.	46
Tabla 4-3. Régimen estacionario. Problema compresible.	50

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Diagrama de A. Collar de la aeroelasticidad.	1
Figura 1-2. Puente de Tacoma instantes antes del colapso. Fotografía obtenida de la página http://naukas.com/2012/03/26/la-resonancia-bien-entendida-el-puente-de-tacoma-narrows/ .	2
Figura 1-3. Esquema del DLM sobre media ala en flecha. Se muestran las correspondientes líneas de dobletes y puntos de colocación [17].	3
Figura 1-4. Esquema del sistema de referencia (imagen del ala obtenida con el software informático XFLR5).	5
Figura 1-5. Esquema de la geometría del ala (imagen del ala obtenida con el software informático XFLR5).	6
Figura 2-1. Superficie S , limitada por la curva C , en un campo vectorial. El vector dS es normal a la superficie (positivo hacia el exterior), y dl un diferencial de curva (positivo en el sentido de rotación determinado por la regla de la mano derecha sobre el vector dS).	9
Figura 2-2. Esquema del espesor de la capa límite y de la estela de un perfil. Representación de los ángulos de ataque (estela y perfil), espesor característico y cuerda.	10
Figura 2-3. Transmisión de perturbaciones en el caso compresible. Por simplicidad, se han dibujado solo perturbaciones originadas por el morro de la aeronave, representadas en rojo. En un instante t , el centro de la onda originada en el instante $t - \Delta t$ se ha desplazado una distancia $U\infty\Delta t$ aguas abajo y el radio de la misma tiene un valor $a\infty\Delta t$. Para el caso supersónico, se observa que todas las perturbaciones han de estar tras el cono de Mach, representado en azul.	12
Figura 2-4. Principio de Superposición.	13
Figura 2-5. Esquema superficies en un instante t (línea continua) y en un instante $t + \Delta t$ (línea discontinua).	14
Figura 2-6. Solución elemental doblete. Disposición en el espacio (izquierda) y campo de velocidades generado por un doblete bidimensional (derecha).	17
Figura 2-7. Panelado geométrico del ala. A la izquierda se muestra la numeración de los paneles del ala, a la derecha una vista de detalle de los vértices de un panel genérico.	20
Figura 2-8. Panel I-ésimo. Puntos de centrado de doblete y colocación.	21
Figura 3-1. Comparación panelado aleatorio vs relación de alargamiento. Se comprueba cómo incluso para un número de paneles pequeño, los resultados siguiendo una relación de alargamiento mejoran notablemente y se mantienen aproximadamente constantes.	28
Figura 3-2. Evolución Tiempo vs Número de Paneles. Se comprueba que el programa optimizado	

mejora de manera notable el tiempo de ejecución, permitiendo imponer un mayor número de paneles.	28
Figura 3-3. Ejemplo descrito en (3-5) con $porcentaje = 0.003$. Señal original: $zat = 1 - e - t$.	29
Figura 3-4. Efecto del porcentaje (3-5) en la Transformada de Fourier. En azul la señal original, en verde (discontinuo) la señal filtrada.	30
Figura 3-5. Fenómeno de Gibbs ($N=50$). En azul se muestra un escalón unitario, en rojo el escalón al utilizar las series de Fourier.	31
Figura 3-6. Factores σnk de Lanczos para $N = 50$. A medida que k aumenta, se disminuye el efecto de las frecuencias más altas.	32
Figura 3-7. Efecto σk de Lanczos ($N=50$) para $k=1$ (izquierda) y $k=2$ (derecha)	32
Figura 4-1. Panelado geométrico ala rectangular ($AR = 2, Nx = 5, Ny = 10$).	36
Figura 4-2. $\Delta p\alpha$ vs xcm Ala rectangular, $k = 0, M \approx 0, AR = 2, Ny = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).	36
Figura 4-3. $Cl\alpha$ vs ycm Ala rectangular, $k = 0, M \approx 0, AR = 2, Nx = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).	37
Figura 4-4. $Cl\alpha R, Iy$ vs ycm Ala rectangular, $k = 1, M \approx 0, AR = 2, Nx = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).	37
Figura 4-5. $CL\alpha, CM\alpha, \phi CL\alpha, \phi CM\alpha$ vs k . Ala rectangular, $M \approx 0, AR = 2, Nx = 5, Ny = 10$. Resultados MATLAB (arriba) y [7] (abajo).	38
Figura 4-6. Panelado geométrico ala en flecha ($AR = 2, \psi = 45^\circ, \lambda = 1, Nx = 5, Ny = 10$).	39
Figura 4-7. Heaving motion (imagen del ala obtenida con el software informático XFLR5).	39
Figura 4-8. $Cl, Cm, \phi Cl, \phi Cm$ vs y/cm . Ala en flecha sin estrechamiento ($\psi = 45^\circ, \lambda = 1$), $AR = 2, k = 0.4, Nx = 5, Ny = 10$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).	40
Figura 4-9. DPM vs VLM. Imagen de fondo obtenida de [16].	41
Figura 4-10. Ejemplo del cambio de variable en la geometría para el caso $M^\infty = 0.5$ en un ala en flecha.	42
Figura 4-11. Comparación Analogía Prandtl-Glauert con Doublet Point Method (Ala rectangular, $AR = 6, Nx = 10, Ny = 60$).	43
Figura 4-12. Efecto de ε en la tangente hiperbólica (4-11).	44
Figura 4-13. Aproximación 2D. Problema de Wagner.	44
Figura 4-14. Respuesta sin aplicar los factores σ de Lanczos.	45
Figura 4-15. Variación del coeficiente de sustentación ante un cambio súbito en el ángulo de ataque para distintos alargamientos. Imagen obtenida de [16].	45
Figura 4-16. Respuesta ante cambio súbito del ángulo de ataque con DPM. Comparación Figura 4-15.	46
Figura 4-17. Ala elíptica $AR = 3$ (x, y adimensionales).	47
Figura 4-18. Ala elíptica ($AR = 3$ izquierda, $AR = 6$ derecha) ante cambio súbito de ángulo de ataque.	47
Figura 4-19. Efecto del estrechamiento en el $CL\alpha$ ante un cambio súbito del ángulo de ataque.	48
Figura 4-20. Zoom A de la Figura 4-19.	48
Figura 4-21. Efecto del ángulo de flecha en el $CL\alpha$ ante un cambio súbito del ángulo de ataque.	49
Figura 4-22. Zoom B de la Figura 4-21.	49
Figura 4-23. Resultados problema 2D caso compresible. Imagen obtenida de [14].	50

Figura 4-24. Resultados obtenidos con el DPM ($AR = 200, Np = 400$).	50
Figura 4-25. Perfil bidimensional atravesando una ráfaga. Imagen obtenida de [10].	51
Figura 4-26. Ráfaga de intensidad unidad atravesando el ala.	52
Figura 4-27. Aproximación 2D. Problema de Küssner.	52
Figura 4-28. Ala elíptica ($AR = 3$ izquierda, $AR = 6$ derecha) atravesando una ráfaga uniforme de intensidad unidad.	53
Figura 4-29. Función de Küssner para varios números de Mach. Imagen obtenida de [14].	53
Figura 4-30. Respuesta ante una ráfaga para diferentes números de Mach.	54
Figura 4-31. Efecto de la flecha ante en la función de Küssner ante una ráfaga de intensidad unidad. A la izquierda caso incompresible, a la derecha caso compresible. Se ha denotado la función de Küssner como ψk para diferenciarla del ángulo de flecha, ψ .	55
Figura 4-32. Entrada Caso 1.	56
Figura 4-33. Respuesta Caso 1.	56
Figura 4-34. Entrada Caso 2.	57
Figura 4-35. Respuesta Caso 2.	57
Figura 4-36. Entrada y respuesta Caso 3.	58
Figura A-1. Ejemplo de la transformada de Fourier de un pulso rectangular	63
Figura B-1. Dominio de integración. [13]	66
Figura C-1. Integral propuesta en (C-18) en un sistema continuo y discreto [7].	72

Notación

DPM	Doublet Point Method
DLM	Doublet Lattice Method
VLM	Vortex Lattice Method
U_{∞}	Velocidad del flujo de aire incidente
ρ_{∞}	Densidad del flujo de aire incidente
p_{∞}	Presión del flujo de aire incidente
M_{∞}	Número de Mach del flujo de aire incidente
a_{∞}	Velocidad del sonido del flujo de aire incidente
β	Factor definido como $\beta = \sqrt{1 - M_{\infty}^2}$
∇	Vector gradiente
∇^2	Operador laplaciano
Δ	Incremento
S	Superficie alar
b	Envergadura
c	Cuerda
c_r	Cuerda en la raíz del ala
c_t	Cuerda en la punta del ala
c_m	Cuerda media
AR	Alargamiento
λ	Estrechamiento
ψ	Ángulo de flecha del borde de ataque
z_a	Superficie media del ala
FP	Forma en planta del ala
ϕ, ϕ'	Potencial de velocidades, Potencial de velocidades de perturbación
\mathbf{v}, \mathbf{v}'	Velocidad del aire incidente, velocidad de perturbación
w	Velocidad vertical adimensional
α	Ángulo de ataque
ω	Frecuencia angular
f	Frecuencia
t	Tiempo

s	Tiempo adimensional
i	Variable compleja, $i = \sqrt{-1}$
L	Sustentación
C_L	Coefficiente de sustentación
M_0	Momento de cabeceo con respecto a x_0
C_{M_0}	Coefficiente de momento de cabeceo
K	Función Kernel
k	Frecuencia reducida
N_x	Número de paneles en dirección x
N_y	Número de paneles en dirección y
N_p	Número total de paneles

1 INTRODUCCIÓN

El hombre nunca sabe de lo que es capaz hasta que lo intenta.

- Charles Dickens -

En 1947, Arthur Collar, científico e ingeniero, definió la aeroelasticidad como "el estudio de la interacción mutua que ocurre dentro del triángulo de las fuerzas inerciales, elásticas y aerodinámicas actuando sobre miembros estructurales expuestos a una corriente de aire, y la influencia de este estudio en el diseño". Es decir, sugirió que la aeroelasticidad podría ser visualizada como un triángulo de disciplinas: Mecánica, Mecánica de Fluidos y Resistencia de Materiales [1].



Figura 1-1. Diagrama de A. Collar de la aeroelasticidad.

Dentro del estudio de las fuerzas aerodinámicas, el interés por los fenómenos no estacionarios ha crecido con el paso de los años debido a sus múltiples aplicaciones. Por ejemplo, en el campo de la aeronáutica, es de interés conocer el incremento de carga cuando un avión atraviesa ráfagas y zonas de turbulencias, o prevenir fenómenos no deseados (como el flameo y la divergencia) que provienen de la interacción entre la estructura (que es elástica) y el fluido, y que pueden llegar a originar el fallo de la aeronave. En el campo de la ingeniería civil, los edificios y puentes de grandes dimensiones se pueden ver afectados por el viento. Tal es la importancia que, a lo largo de la historia, se han producido hechos significativos en los que el viento ha sido capaz de inducir el colapso estructural, como sucedió en 1940 en el Puente de Tacoma Narrows (Figura 1-2). También es de interés para otros campos comprender cómo consiguen moverse los insectos, o cómo funcionan las cuerdas vocales, las válvulas cardíacas, etc. [1] [2].

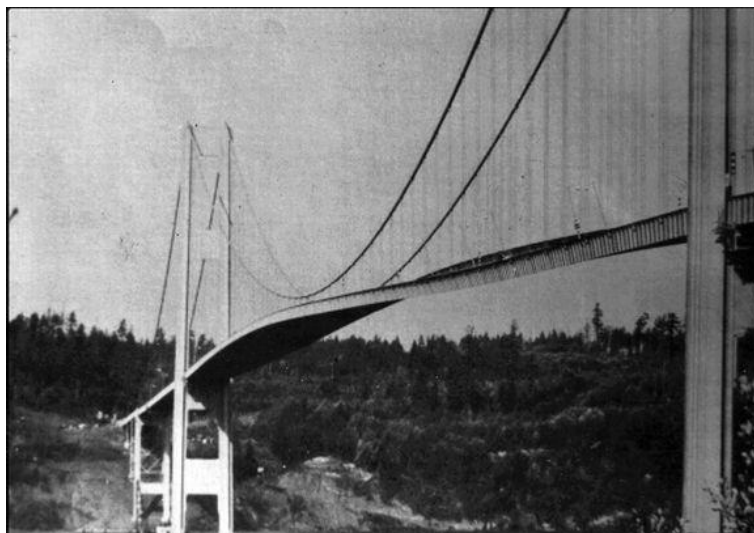


Figura 1-2. Puente de Tacoma instantes antes del colapso. Fotografía obtenida de la página <http://naukas.com/2012/03/26/la-resonancia-bien-entendida-el-puente-de-tacoma-narrows/>.

Por todo ello, el cálculo de las fuerzas producidas por fenómenos aerodinámicos no estacionarios ha sido siempre uno de los principales problemas de estudio en el ámbito de la aeroelasticidad. En el campo de la ingeniería aeronáutica, se han desarrollado diversos métodos para calcular las distribuciones de presiones en las alas cuando éstas experimentan este tipo de fenómenos en régimen subsónico, desde que Küssner [3], en 1940, formulara la ecuación integral que gobierna dichas situaciones.

Varios de estos métodos se basan en la discretización del ala, como es el caso del Doublet Lattice Method (DLM) [4], el cual es una extensión del Vortex Lattice Method (VLM), incluyendo el régimen no estacionario. Estos métodos tienen la ventaja de que sirven para analizar cualquier tipo de geometría alar. Sin embargo, presentan algunos inconvenientes. Por un lado, el VLM, presenta problemas al introducir los efectos de la compresibilidad [2], por lo que se han probado métodos basados en diferencias finitas que mejoren este aspecto, [5] - [6]. Por otro lado, el problema del DLM es que existen inconsistencias debidas a la dificultad de evaluar las singularidades que aparecen en la ecuación integral de Küssner. Es por ello que T. Ueda y E. H. Dowell, autores del documento de referencia [7] (base del presente proyecto), desarrollan el Doublet Point Method (DPM), que intenta eliminar esta problemática evaluando la singularidad de la función integral en el sentido de las integrales impropias de Mangler [8]. Además, otra de las principales diferencias entre el DLM y el DPM es que el primero utiliza líneas finitas de dobletes situadas a $\frac{1}{4}$ del borde de cada panel (véase Figura 1-3), mientras el segundo se basa en una distribución discreta, introduciendo un único doblete por cada panel. Esta distribución se expondrá en profundidad en apartados posteriores. El hecho de utilizar una distribución de este tipo hace que el problema se simplifique notablemente.

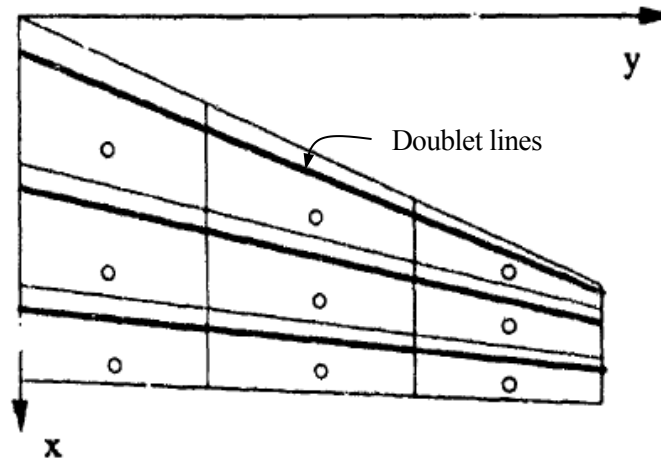


Figura 1-3. Esquema del DLM sobre media ala en flecha. Se muestran las correspondientes líneas de dobletes y puntos de colocación [17].

Así, mediante el método propuesto, se consigue resolver numéricamente la distribución de presiones para el caso compresible, incompresible, no estacionario y estacionario en régimen subsónico.

Por último, el presente trabajo no solo pretende simular los resultados para una frecuencia dada, tal y como realizan los autores en [7], sino que, mediante el uso de las series de Fourier, se plantearán problemas que superpongan numerosas frecuencias para reproducir resultados en el dominio del tiempo y poder así analizar cualquier tipo de entrada. La gran ventaja que supone trabajar en el dominio de la frecuencia es que no hay necesidad de almacenar instantes de tiempos anteriores para calcular de manera escalonada la solución final, tal y como ocurría en trabajos previos a éste (véanse [2] y [9]). De la misma manera, las expresiones se simplifican al no aparecer las derivadas temporales procedentes de trabajar en el dominio del tiempo.

1.1. Objetivos y estructura del trabajo

Con la motivación de estudiar uno de los problemas esenciales de la Aerodinámica no estacionaria de manera diferente, nace el presente Trabajo de Fin de Grado, que tiene por objetivos los siguientes:

- El objetivo principal es la implementación del Doublet Point Method en MATLAB y la obtención de algunos resultados relevantes para su comprobación.
- Realizar una demostración detallada de los fundamentos teóricos necesarios para abordar el problema. Dada la extensa variedad de soluciones que se puede encontrar en la bibliografía (todas intentando expresar el mismo resultado), a cada cual más enrevesada y tediosa, se pretende expresar de la manera más sencilla y detallada posible los pasos necesarios para la resolución del problema. Como base, se utilizará el procedimiento que sigue E. H. Dowell en su libro “A Modern Course in Aeroelasticity” [1].
- Proponer mejoras que reduzcan el coste computacional del Doublet Point Method en el cálculo de la solución en el dominio del tiempo. Como se ha comentado, se superpondrán numerosas frecuencias procedentes de la transformada de Fourier de la entrada, por lo que será necesario una optimización del método para no elevar demasiado los tiempos de ejecución. Destacar la inclusión de los factores σ de Lanczos, no ampliamente usados hoy en día, para mejorar la convergencia de los resultados.
- Analizar futuras líneas de investigación

Son varias las aplicaciones que este trabajo podría tener. Por ejemplo, sería de utilidad para la docencia de asignaturas como Aeroelasticidad, en las que es necesario impartir un bloque de Aerodinámica no estacionaria. Además, servirá como una base firme (ya que incluye los casos compresibles, incompresibles, estacionario y no estacionario) para implementar la dinámica del ala, acoplando los efectos aerodinámicos y los elásticos, y analizando así problemas como el flameo, la divergencia, ... [10].

En cuanto a la estructura, se dividirá el trabajo en cuatro apartados (además de este).

- En el apartado 2 se expondrán los fundamentos teóricos del Doublet Point Method.
- En el apartado 3 se realizará la optimización que se ha comentado con anterioridad y se incluirán los factores de Lanczos.
- En el apartado 4 se realizarán una serie de análisis y comparaciones para comprobar la veracidad del método.
- En el apartado 5 se expondrán las conclusiones y se analizarán posibles líneas futuras de investigación.

Es importante destacar la importancia de algunas herramientas matemáticas en el desarrollo del método, como es el caso de la transformada de Fourier, que permite, entre otras cosas, simplificar algunas de las ecuaciones diferenciales. Es por ello por lo que se dedicará un anexo exclusivamente a la explicación de dicha herramienta.

Por otro lado, se pretende continuar con la filosofía MATLAB inculcada en las clases de la Escuela Superior de Ingeniería de Sevilla, en las que se ve el software como una herramienta que facilita los cálculos y permite obtener resultados a problemas complejos de forma numérica, en lugar de como un software complicado de programar. Los problemas estudiados en algunas asignaturas, como Aerodinámica, Mecánica de Fluidos, etc., son muy complejos. Por lo general, es usual aplicar numerosas hipótesis para poder llegar a soluciones analíticas en clase y que los alumnos analicen los resultados, siendo este tipo de soluciones bastante más complejas que las numéricas. Con métodos como el propuesto se pueden analizar problemas reales, sin apenas hipótesis, en un tiempo muy reducido, lo cual mejora la experiencia del alumno con la materia. Es tal la importancia, la cantidad de utilidades que se le dan en la Universidad, que merece la pena entender cómo se creó y ver como hoy en día se sigue usando para el mismo fin.

1.2. MATLAB

Tradicionalmente se han venido utilizando como lenguajes de programación en el cálculo científico y de ingeniería, casi de forma obligada FORTRAN¹ o C. Sin dudar de su potencia, la creación de programas en aquéllos implica un conocimiento exhaustivo del lenguaje y su sintaxis, además del desarrollo junto a los programas de muchas funciones matemáticas (incluso a veces tan primitivas como el producto escalar de dos vectores). Además, el soporte, en general, de tipos de datos comúnmente útiles para los matemáticos, como podían ser los números complejos, no existía en muchos lenguajes (como C).

Durante los años 70, Cleve Moler y otros compañeros desarrollaron las bibliotecas LINPACK y EISPACK para FORTRAN. La primera contenía un conjunto de rutinas para resolver ecuaciones lineales, mientras que la segunda contenía utilidades para resolver problemas con autovalores. Juntas, representaban una base relativamente completa para resolver problemas matriciales. A finales de los 70, Moler (entonces profesor de Ciencias de la Computación en la Universidad de New Mexico) quiso utilizar LINPACK y EISPACK con sus estudiantes, para sus clases de álgebra lineal. Sin embargo, su idea inicial no era hacerles aprender FORTRAN ya que ese no era el propósito del curso. Así, de forma natural, comenzó a programar un entorno que proporcionase acceso fácil a LINPACK y EISPACK. Moler bautizó su programa MATLAB (de MATrix LABoratory). En un año o dos, MATLAB comenzó a hacerse un sitio en el mundo del software científico, e incluso empezó a convertirse en un objeto de culto.

En 1983, John Little supo de la existencia de MATLAB por una visita de Moler a Stanford. Little, ingeniero, reconoció la aplicación potencial de MATLAB a problemas de ingeniería. Así, Little se unió a Moler y a Steve Banger para desarrollar una versión profesional, de segunda generación de MATLAB, escrita en C y con soporte para gráficos integrado.

The MathWorks, Inc. se fundó en 1984 y hoy en día continúa el desarrollo de MATLAB.

Sus creadores:

“MATLAB es un lenguaje de programación de alto nivel, orientado a cálculo científico, con un entorno integrado para desarrollo de algoritmos, visualización y análisis de datos y cálculo numérico. Usando

¹ No en vano, su nombre proviene de las siglas FORMula TRANslator

MATLAB se pueden resolver problemas de ingeniería tan rápido como los otros lenguajes de programación tradicionales: C, C++ y FORTRAN.” [11]

Por último, hacer mención sobre las restricciones de uso de este software. Debe notarse que MATLAB no es gratis, aunque la mayoría de las Universidades poseen una licencia para permitir su uso en ordenadores del campus, además de existir la posibilidad de obtener una licencia de estudiante a bajo precio (aunque con ciertas limitaciones en el software).

Por si el lector desea investigar, existe una alternativa libre (GNU Octave) con casi la misma sintaxis que MATLAB (y totalmente gratis). Gran parte de lo dicho aquí también puede ser tenido en cuenta para Octave, aunque los programas desarrollados en este estudio no están probados en dicho entorno. [12]

1.3. Definición de la geometría

Es importante, antes de exponer los cálculos llevados a cabo en este trabajo, definir algunas características geométricas, tanto del ala como del sistema de coordenadas, que serán fundamentales a la hora de realizar el estudio.

En primer lugar, en cuanto al sistema de referencia (Figura 1-4), se elige un sistema de coordenadas cartesianas inercial (x, y, z). Su origen se encontrará en el borde de ataque del perfil central, la dirección x estará dada según la dirección de la corriente incidente, la dirección y según la dirección de la envergadura y la dirección z completa el triedro, siendo positiva hacia arriba. El sistema de referencia se mueve a velocidad constante U_∞ , pero no de manera solidaria al ala, puesto que el estudio de los fenómenos no estacionarios se realizará mediante cambios en las posiciones que ocupa la superficie alar con respecto a este sistema de referencia.

Por otro lado, en cuanto a la forma en planta del ala, está completamente definida por los siguientes parámetros:

- Superficie alar, S : Valor de la superficie del ala proyectada sobre los ejes x e y .
- Envergadura, b : Distancia entre los bordes marginales (extremos) del ala.
- Cuerda, c : Distancia entre el borde de ataque (x_a) y de salida (x_s) del ala.
- Alargamiento, AR : Parámetro adimensional definido como $AR = b^2/S$
- Estrechamiento, λ : Cociente entre los valores de la cuerda en los bordes marginales (c_t) y en la raíz (c_r), $\lambda = c_t/c_r$.
- Ángulo de flecha del borde de ataque, ψ : Ángulo que forma el borde de ataque con la perpendicular a la dirección de la corriente incidente

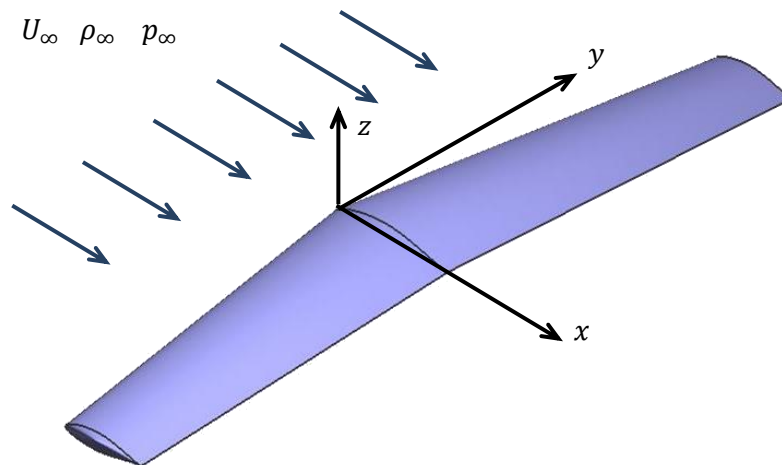


Figura 1-4. Esquema del sistema de referencia (imagen del ala obtenida con el software informático XF5).

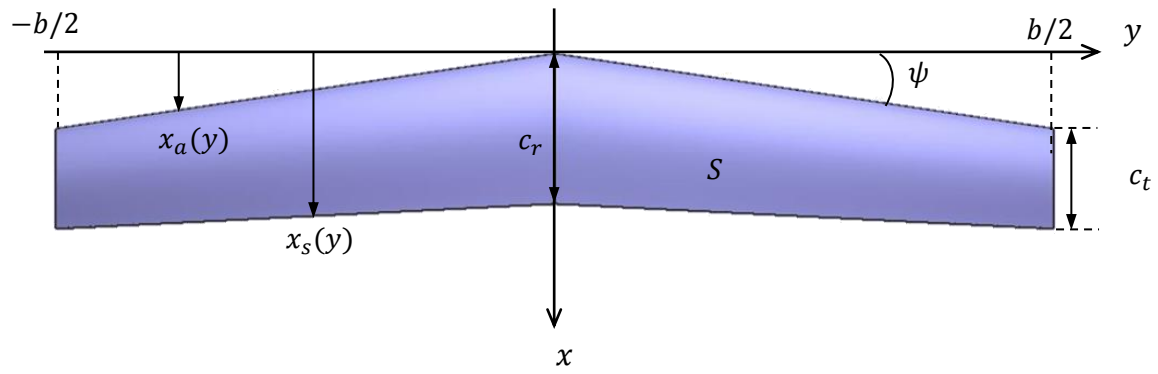


Figura 1-5. Esquema de la geometría del ala (imagen del ala obtenida con el software informático XFLR5).

A continuación, se desarrollan las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan al fluido alrededor del ala.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La alegría de ver y entender es el más perfecto don de la naturaleza.

- Albert Einstein -

El objetivo del presente capítulo es exponer los fundamentos teóricos necesarios para la implementación del Doublet Point Method. En particular, se realiza el desarrollo de las ecuaciones que gobiernan al fluido cuando éste se mueve alrededor de un ala.

Se parte de las ecuaciones generales de Navier-Stokes, las cuales se pueden encontrar desarrolladas en [13] junto a sus condiciones de contorno. Se trata de un conjunto de ecuaciones no lineales que describen el movimiento de un fluido, que se obtienen de aplicar los principios de conservación fundamentales de la Mecánica y la Termodinámica a un volumen fluido. En particular, en el presente estudio, se considera que los términos debidos a viscosidad, fuerzas gravitatorias y conducción de calor son despreciables en la zona en la cual se realiza el estudio (exterior a la capa límite), véase [9] y [2]. Definiendo los siguientes números adimensionales:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} = \frac{U_{\infty} L}{\nu}, \quad (2-1)$$

$$Fr = \frac{U_{\infty}^2}{gL}, \quad (2-2)$$

$$Pe = Pr \cdot Re, \quad (2-3)$$

donde Re es el número de Reynolds, Fr el número de Froude, Pe el número de Peclet, Pr el número de Prandtl, L es la longitud característica, ν la viscosidad cinemática y g la fuerza másica característica (gravedad). Así, tomando los datos característicos de un avión, como longitud característica la cuerda del perfil $L \sim 1 \text{ m}$, velocidad $U_{\infty} \sim 100 \text{ m/s}$, viscosidad cinemática del aire $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y número de Prandtl característico del aire 0.7, se puede comprobar que:

- $Re \sim 10^7 \gg 1$, por lo que se pueden despreciar los efectos viscosos. Destacar que esto es posible excepto en una delgada capa límite que, como se describirá más adelante, permanece adherida a la

superficie del ala si, como es usual, los perfiles son esbeltos y están a bajos ángulos de ataque respecto de la corriente incidente.

- $Fr \sim 10^3 \gg 1$, por lo que se pueden despreciar las fuerzas gravitatorias.
- $Pe \sim 0.7 \cdot 10^7 \gg 1$, por lo que se pueden despreciar los efectos de la conducción de calor en el exterior de la capa límite cuando ésta permanece adherida.

Así, las ecuaciones simplificadas quedan de la siguiente manera:

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2-4)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0. \quad (2-5)$$

- Ecuación de la entropía:

$$\frac{DS}{Dt} = 0. \quad (2-6)$$

Téngase en cuenta que el operador D/Dt representa la derivada sustancial (siguiendo a la partícula), $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Para el caso tridimensional, dado que la ecuación de cantidad de movimiento es vectorial, se tienen cinco ecuaciones y cinco incógnitas (dos variables de estado y tres componentes de velocidad).

De la ecuación (2-6) se obtiene que todas las líneas de corriente tienen entropía constante. Como todas ellas proceden de una región uniforme, se concluye que todo el campo fluido tiene entropía constante. Para un fluido compresible, esto es

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = cte, \quad (2-7)$$

donde γ es el coeficiente de dilatación adiabática del fluido. Este resultado es muy importante puesto que implica que existe una relación de barotropía (es decir, la densidad del fluido depende de la presión) tanto para el caso compresible como incompresible.

Un punto esencial en el desarrollo de la teoría es el uso de ciertas funciones que reducen el número de variables dependientes, en particular la velocidad potencial, $\phi(x, y, z, t)$, y la aceleración potencial o función de presión, $\psi(x, y, z, t)$. La existencia de dichas funciones recae en la condición de irrotacionalidad del flujo, lo cual significa que toda partícula tiene momento angular nulo respecto su centro de gravedad. Dicha condición, expresada matemáticamente, es

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (2-8)$$

Esto puede ser demostrado mediante la utilización de los Teoremas de Stokes y Bjerkness-Kelvin. El primero de ellos permite transformar la integral de superficie de la componente normal del rotacional de la velocidad, en una integral sobre la curva \mathcal{C} que limita S (Figura 2-1):

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma. \quad (2-9)$$

La integral de la derecha (2-9) es lo que se conoce en la mecánica de fluidos como circulación Γ . Aplicando el Teorema de Bjerkness-Kelvin, tomando la derivada sustancial de la circulación, y resolviendo para el caso general de un flujo barotrópico:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (2-10)$$

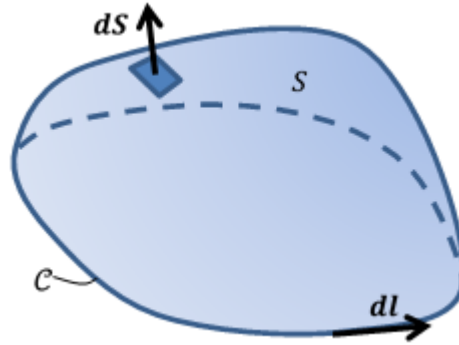


Figura 2-1. Superficie S , limitada por la curva C , en un campo vectorial. El vector $d\mathbf{S}$ es normal a la superficie (positivo hacia el exterior), y $d\mathbf{l}$ un diferencial de curva (positivo en el sentido de rotación determinado por la regla de la mano derecha sobre el vector $d\mathbf{S}$).

Cabe destacar que la situación barotrópica prevalece en la mayoría de casos importantes de la aeroelasticidad. Tomando una curva cerrada lo suficientemente grande para asegurar que el flujo es uniforme, se tendrá que la circulación en dicha curva es nula, y dada la condición (2-10), así se mantendrá para todo instante de tiempo.

Así, en virtud del Teorema de Stokes, (2-9), se demuestra la condición de irrotacionalidad (2-8). Es decir, el campo de velocidades es irrotacional y, por tanto, proviene de un potencial, tanto para el caso incompresible como compresible.

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (2-11)$$

Nótese que esta condición solo es válida para la zona no viscosa. Para más detalle véase [2] y [14].

2.1. Linealización de las ecuaciones. Ecuación de ondas

Haciendo uso de la Teoría Linealizada, la cual supone que las perturbaciones son pequeñas, las ecuaciones se simplifican notablemente. Ésta permite expresar cualquier magnitud ψ del campo fluido como $\psi = \psi_\infty + \psi'$, con $\psi' \ll \psi_\infty$, donde ψ' se conoce como perturbación de ψ . Cabe destacar que esta aproximación es adecuada cuando los ángulos de ataque y el grosor del perfil son pequeños, y la capa límite se encuentra adherida (2-12). Esta hipótesis permite linealizar las ecuaciones entorno a su valor aguas arriba.

$$\left. \begin{aligned} Re = \frac{U_\infty \rho_\infty c_r}{\mu_\infty} \gg 1 \\ z_e(x, y) - z_i(x, y) \sim h_0 \ll c_r, b \\ \alpha(y) \sim \alpha_E \sim \alpha_0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \delta_a \sim \frac{c_r}{\sqrt{Re}} \ll c_r, b \\ \delta_E \sim \frac{c_r}{\sqrt{Re}} \ll c_r, b \end{aligned} \right. \quad (2-12)$$

donde Re = Número de Reynold, z_e = extradós, z_i = intradós, h_0 = espesor característico,
 $\alpha(y)$ = ángulo de ataque perfil y, α_E = ángulo de ataque de la estela,
 α_0 = ángulo de ataque característico, c_r = cuerda en la raíz, b = envergadura,
 δ_a = espesor de la capa límite del ala, δ_E = espesor de la capa límite de la estela

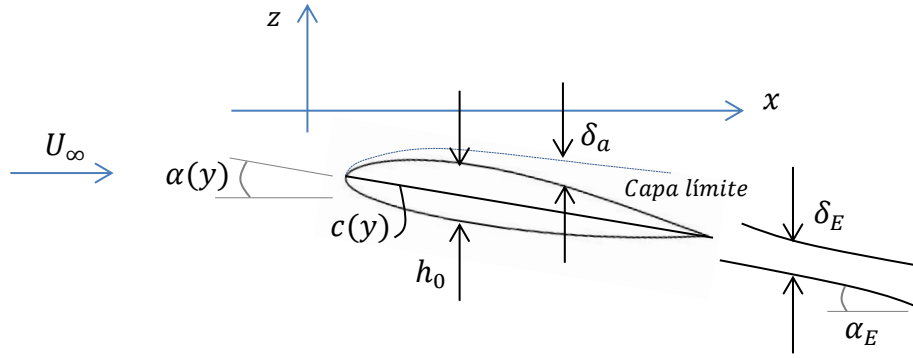


Figura 2-2. Esquema del espesor de la capa límite y de la estela de un perfil. Representación de los ángulos de ataque (estela y perfil), espesor característico y cuerda.

Linealizando las principales variables del problema:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U_\infty \mathbf{e}_x + \mathbf{v}' = (U_\infty + v'_x) \mathbf{e}_x + v'_y \mathbf{e}_y + v'_z \mathbf{e}_z, \\ \phi &= \phi_\infty + \phi', \quad p = p_\infty + p', \quad \rho = \rho_\infty + \rho', \end{aligned} \quad (2-13)$$

donde $\mathbf{v}' = \nabla \phi'$ y $\nabla \phi_\infty = U_\infty \mathbf{e}_x$. Así, linealizando las ecuaciones (2-4), (2-5) y (2-7), se obtiene:

- Ecuación de la entropía linealizada: Partiendo de la ecuación (2-7), introduciendo las variables linealizadas, y haciendo uso de las Series de Taylor², se obtiene

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = cte, \quad (2-7)$$

$$\frac{p_\infty + p'}{(\rho_\infty + \rho')^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma},$$

$$\frac{p'}{p_\infty} = \gamma \frac{\rho'}{\rho_\infty}, \quad (2-14)$$

donde (2-14) representa la ecuación de la entropía linealizada.

- Ecuación de cantidad de movimiento linealizada: Partiendo de la ecuación (2-5), desarrollando la derivada sustancial:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0. \quad (2-5)$$

Dado que la entalpía se define³ como $h = e + p/\rho$, y, para el estudio en cuestión, $de = TdS - pd(1/\rho)$, se tiene

$$dh = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{\rho}dp, \quad (2-15)$$

donde se ha tenido en cuenta que, según la ecuación (2-6), $dS = 0$, la ecuación se puede describir de la siguiente

² Para $\varepsilon \ll 1$, se tiene: $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + [\alpha(1 + \varepsilon)^{\alpha-1}]_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \dots \approx 1 + \alpha\varepsilon$

³ e representa la energía interna, T la temperatura

manera

$$\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (2-16)$$

Introduciendo (2-16) en (2-5), y aplicando la definición del doble producto vectorial ⁴:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla h = 0, \quad (2-17)$$

donde $v=|\mathbf{v}|$. Haciendo uso de la relación (2-11) (la velocidad proviene del gradiente de un potencial) y agrupando los vectores gradiente, se llega finalmente a la conocida Ecuación de Bernoulli no estacionaria para gases:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h = \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + h_\infty. \quad (2-18)$$

Teniendo en cuenta que $v^2 = (U_\infty + v'_x)^2 + v'^y{}^2 + v'^z{}^2 \approx U_\infty^2 + 2U_\infty v'_x = U_\infty^2 + 2U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x}$ al despreciar términos de segundo orden, y utilizando las variables linealizadas, la ecuación (2-18) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} + h' = 0 \rightarrow h' = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi'. \quad (2-19)$$

Utilizando la relación termodinámica $h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ combinada con (2-14), se tiene

$$h' = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_\infty + p'}{\rho_\infty + \rho'} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) = \frac{p'}{\rho_\infty + \rho'} \approx \frac{p'}{\rho_\infty}, \quad (2-20)$$

donde se han despreciado los efectos de perturbaciones de densidad. Combinando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$p' = -\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi'. \quad (2-21)$$

Será útil también expresar la perturbación de densidad en función del potencial de velocidades de perturbación. Para ello, combinando las ecuaciones (2-21) y (2-14):

$$\rho' = -\frac{\rho_\infty}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi', \quad (2-22)$$

donde $a_\infty = \sqrt{\gamma P_\infty / \rho_\infty}$ representa la velocidad del sonido aguas arriba.

- Ecuación de continuidad linealizada: Partiendo de (2-4), y aplicando la siguiente propiedad del producto escalar, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$, se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2-23)$$

que, introduciendo las variables linealizadas, y la relación $\nabla \cdot \mathbf{v}' = \nabla^2 \phi'$, proporciona

⁴ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_{\infty} \nabla^2 \phi' + \mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (2-24)$$

Combinando las ecuaciones (2-22) y (2-24), y teniendo en cuenta que $\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla = U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x}$, se obtiene

$$\nabla^2 \phi' = \frac{1}{a_{\infty}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi'. \quad (2-25)$$

Finalmente, introduciendo el siguiente cambio de variable

$$t = \bar{t}, \quad x = \bar{x} + U_{\infty} \bar{t}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad (2-26)$$

que implica que los ejes se desplazan a la velocidad del flujo incidente y en la misma dirección, se obtiene

$$\bar{\nabla}^2 \phi' = \frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \bar{t}^2}, \quad (2-27)$$

que es la conocida Ecuación de Ondas⁵. Dichas ondas se propagan con velocidad a_{∞} respecto a un sistema de referencia que se mueve con la corriente incidente, tal y como se muestra en la Figura 2-3. En ella, también puede apreciarse que, debido a la convección, las perturbaciones no afectan por igual a todos los puntos del mismo (véase la diferencia entre los frentes de onda en el borde de ataque y en el de salida). De hecho, a velocidades superiores a las del sonido, las perturbaciones solo pueden afectar a los puntos que estén contenidos en el cono de Mach [2].

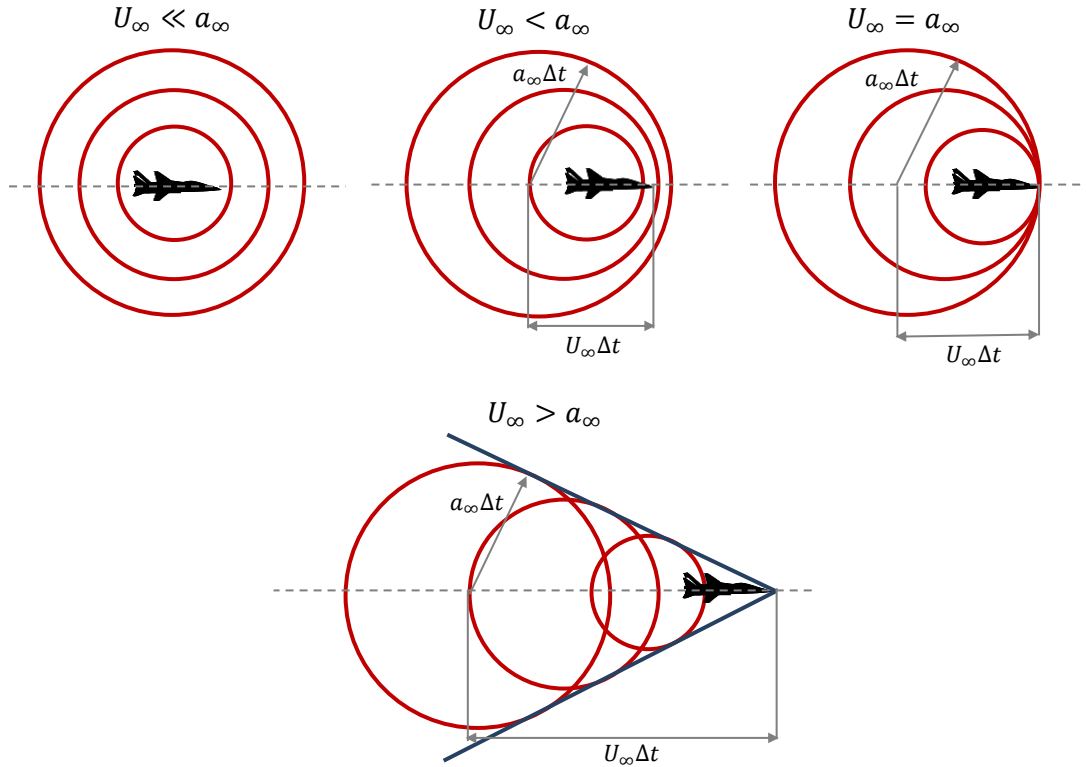


Figura 2-3. Transmisión de perturbaciones en el caso compresible. Por simplicidad, se han dibujado solo perturbaciones originadas por el morro de la aeronave, representadas en rojo. En un instante t , el centro de la onda originada en el instante $t - \Delta t$ se ha desplazado una distancia $U_{\infty} \Delta t$ aguas abajo y el radio de la misma tiene un valor $a_{\infty} \Delta t$. Para el caso supersónico, se observa que todas las perturbaciones han de estar tras el cono de Mach, representado en azul.

⁵ Nota: El operador $\bar{\nabla}^2$ representa el laplaciano en las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Dado que el problema, al haber hecho la consideración de que las perturbaciones son pequeñas, es lineal, se puede aplicar el Principio de Superposición y dividir el problema en dos: Problema Simétrico (o de espesor) y Sustentador (o antisimétrico).

Se definen la línea media (z_a) y el espesor (z_t) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} z_a(x, y) &= \frac{z_e(x, y) + z_i(x, y)}{2}, \\ z_t(x, y) &= \frac{z_e(x, y) - z_i(x, y)}{2}, \end{aligned} \quad (2-28)$$

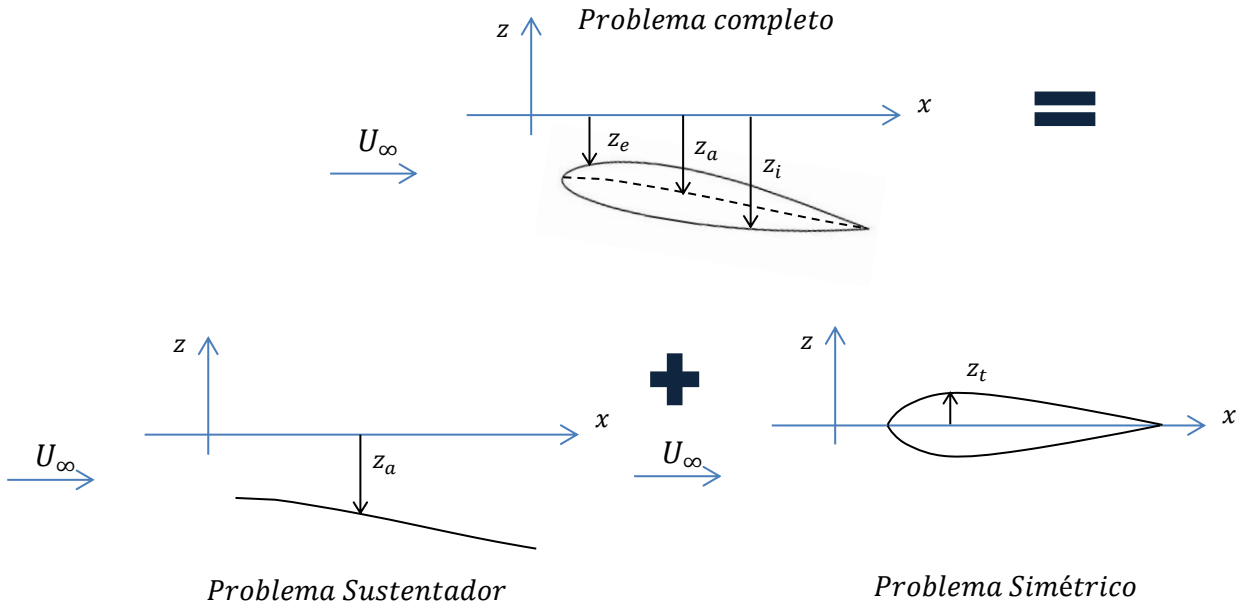


Figura 2-4. Principio de Superposición.

En el presente trabajo se centrará el estudio en el problema sustentador, que es el de mayor interés aerodinámico. Se propone como línea futura de investigación el estudio del problema simétrico, así como el acoplamiento de ambos.

2.2. Condiciones de contorno

Por otro lado, hay que considerar algunas condiciones de contorno del problema. En general, como se verá en apartados posteriores, son estas condiciones, más que las ecuaciones del movimiento per se, las que complican el problema.

- Infinito no perturbado

Dado que las pequeñas perturbaciones se producen por la presencia del ala y la estela, se considera que lejos de éstas

$$v' = |\nabla\phi'| \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |\mathbf{r}| = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (2-29)$$

- Condición de Impenetrabilidad

La velocidad relativa entre el fluido y el ala debe ser, en todo momento, tangente a la superficie de la misma. Esto se conoce como Condición de Impenetrabilidad. Se considera un cuerpo cuya superficie se pueda describir con una función $F(x, y, z, t) = 0$ en el instante t , y con $F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = 0$ en un instante $t + \Delta t$, véase la Figura 2-5. Entonces,

$$\Delta F = F(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - F(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2-30)$$

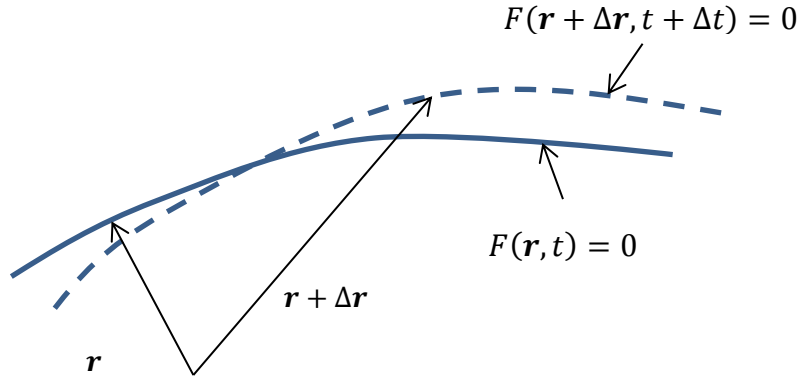


Figura 2-5. Esquema superficies en un instante t (línea continua) y en un instante $t + \Delta t$ (línea discontinua).

Desarrollando $F(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t)$ como $F(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) = F(\mathbf{r}, t) + \nabla F \cdot \Delta \mathbf{r} + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t$, se obtiene:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t = \nabla F \cdot \Delta \mathbf{r} + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t = 0. \quad (2-31)$$

Por otro lado, se define el vector normal unitario como

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (2-32)$$

por lo que la velocidad normal a la superficie es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{1}{|\nabla F|}. \quad (2-33)$$

Operando, la expresión anterior se puede transformar en

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0. \quad (2-34)$$

Para el caso de cuerpo de ecuación $F = z - z_a(x, y, t)$, realizando la hipótesis de ala esbelta,

$$\frac{\partial z_a}{\partial y}, \frac{\partial z_a}{\partial z} \ll 1, \quad (2-35)$$

y despreciando términos de segundo orden, se tiene

$$v'_z(x, y, z = z_a(x, y), t) = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_a}{\partial x}. \quad (2-36)$$

Dado que el espesor característico del ala es muy inferior a la cuerda y a la envergadura, y que el ala se encuentra muy cercana al plano $z = 0$ (ángulo de ataque muy pequeño), se puede considerar el ala se encuentra en dicho plano, esto es

$$z_{e,i} \sim z_a \sim z = 0^\pm \rightarrow FP: \text{Forma en planta del ala}. \quad (2-37)$$

Así, la condición de impenetrabilidad puede evaluarse en $z = 0$,

$$v'_z(x, y, z = 0, t) = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_a}{\partial x}. \quad (2-38)$$

- Condiciones en la estela

Por otro lado, en los puntos de la estela (la cual se supone también en $z = 0^\pm$), si se considera un volumen infinitesimal de fluido, la presión en la cara superior debe ser igual a la presión en la cara inferior, debido a que la masa de fluido es despreciable. Teniendo en cuenta esto, y mediante la ecuación (2-21), se obtiene lo que es conocido como Condición de Kutta Generalizada.

$$p_e(x, y, z = 0^+) = p_i(x, y, z = 0^-), \quad (2-39)$$

que implica

$$\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) (\phi'_e - \phi'_i) = 0. \quad (2-40)$$

Para el caso estacionario ($\partial/\partial t = 0$), puede observarse que queda la expresión más conocida:

$$v'_x(x, y, 0^+) = v'_x(x, y, 0^-). \quad (2-41)$$

Igualmente, considerando que no se acumula masa en el volumen infinitesimal, igualando el gasto que entra y el que sale (recordando que el gasto se define como $G = \rho v A$, donde ρ es la densidad, v la velocidad y A la superficie que atraviesa), se tiene:

$$\rho_\infty v'_z(x, y, 0^+) A = \rho_\infty v'_z(x, y, 0^-) A, \quad (2-42)$$

donde se ha supuesto que las variaciones de densidad en el volumen de control son despreciables. Suponiendo ambas áreas idénticas, se obtiene:

$$v'_z(x, y, 0^+) = v'_z(x, y, 0^-). \quad (2-43)$$

Cabe destacar que las condiciones (2-39) y (2-43) se refieren a puntos (x, y, z) pertenecientes a la estela.

Antes de dar paso a la solución en el dominio de la frecuencia, comentar que el problema puede dividirse en estacionario y no estacionario de manera análoga a lo que se hace en la Figura 2-4. Esto no supondrá una gran ventaja dado que con eliminar los términos dependientes del tiempo de las ecuaciones no estacionarias se obtendría el caso estacionario. Por ello se decide analizar el problema en conjunto y, si después se quisiera analizar alguno de los dos por separado, se podrán simplificar las ecuaciones con facilidad.

2.3. Solución en el dominio de la frecuencia. Ecuación de Possio

Los resultados expuestos en este apartado se han obtenido siguiendo [1].

Es bien conocido que cualquier función en el dominio del tiempo puede ser expresada como una suma de armónicos (véase Anexo A. Transformada de Fourier), por lo que se propone encontrar la solución para uno genérico. Expresando el potencial de velocidades de perturbación de esta manera, se tiene

$$\phi' = \Re(\bar{\phi} e^{i\omega t}), \quad (2-44)$$

donde $\bar{\phi}$ representa la amplitud compleja y ω la frecuencia angular. Introduciendo la ecuación (2-44) en la (2-25) es posible eliminar la dependencia con el tiempo de las ecuaciones,

$$\nabla^2 \bar{\phi} - \frac{1}{a_\infty^2} \left(i\omega + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \bar{\phi} = 0. \quad (2-45)$$

A continuación, la ecuación se puede simplificar aplicando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & y_1 &= \beta y, & z_1 &= \beta z, \\ \bar{\phi} &= \exp \left(i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x \right) \phi^*, \end{aligned} \quad (2-46)$$

donde $\beta = \sqrt{1-M^2}$. Así, aplicando el cambio en la (2-45), operando y expresando el operador laplaciano en las nuevas variables como $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$, se tiene

$$\exp \left(i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x_1 \right) (\nabla_1^2 \phi^* + k^2 \phi^*) = 0, \quad (2-47)$$

donde $k = \left(\frac{M}{1-M^2} \right) \frac{\omega}{U_\infty}$. La ecuación (2-47) es esencialmente la ecuación de ondas reducida. Cabe destacar que

$$\nabla_1^2 \phi^* + k^2 \phi^* = 0 \quad (2-48)$$

es la conocida Ecuación de Helmholtz. Para hallar la solución a esta ecuación se hace uso de la Fórmula de Green. El desarrollo matemático se encuentra en el Anexo B. Fórmula de Green⁶. Resolviendo, deshaciendo el cambio de variable, y calculando la velocidad de perturbación vertical⁷ ($\bar{v}_z' = \partial \bar{\phi} / \partial z$), teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$, se obtiene finalmente la conocida como Ecuación de Possio

$$\bar{v}_z' = \frac{1}{4\pi} \int_{FP} \frac{\Delta \bar{p}(x_0, y_0, z_0 = 0)}{\rho_\infty U_\infty} K(x - x_0, y - y_0, 0) dx_0 dy_0, \quad (2-49)$$

donde $\Delta \bar{p}$ es la diferencia de presiones entre intradós y extradós, y

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \lim_{z \rightarrow 0} \exp \left(-i \frac{\omega}{U_\infty} x \right) \int_{-\infty}^x \exp \left[\frac{i}{(1-M^2)} \frac{\omega}{U_\infty} \xi \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \right\} d\xi, \\ r &\equiv [\xi^2 + (1-M^2)(y^2 + z^2)]^{\frac{1}{2}} = [\xi^2 + \beta^2(y^2 + z^2)]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2-50)$$

donde K se conoce como función Kernel.

Se puede demostrar que el incremento de presiones producido es idéntico al proporcionado por un campo de dobletes dispuestos según la dirección del eje z . La solución elemental doblete surge de la superposición de los potenciales creados por una fuente y un sumidero situados a una distancia ε , tal y como se muestra en la Figura 2-6. Ambas soluciones elementales poseen una intensidad idéntica. En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene la solución elemental doblete. Por otro lado, se define la aceleración potencial como

$$\nabla \psi = \frac{D\mathbf{v}}{dt}. \quad (2-51)$$

Se puede demostrar que esta variable ψ y el campo de presiones están íntimamente relacionados mediante la siguiente expresión

⁶ Por comodidad se omiten los subíndices 1, es decir $(x_1, y_1, z_1) \equiv (x, y, z)$.

⁷ Con velocidad vertical se hace referencia a la amplitud compleja

$$\psi = \frac{p_\infty - p}{\rho} \quad (2-52)$$

El desarrollo se encuentra en [15].

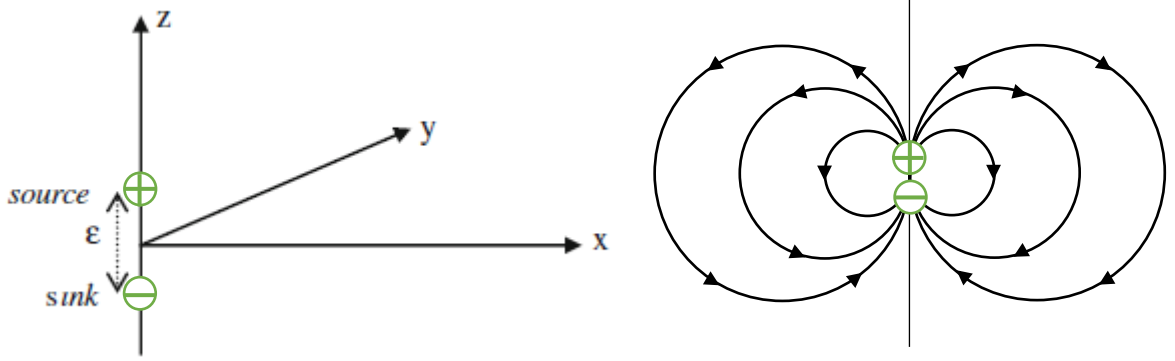


Figura 2-6. Solución elemental doblete. Disposición en el espacio (izquierda) y campo de velocidades generado por un doblete bidimensional (derecha).

Utilizando esta nueva variable, se puede demostrar que el campo de presiones generado por una distribución de dobletes es idéntico al que resulta en la ecuación (2-49). Es por ello por lo que el presente método toma el nombre de Doublet Point Method. Una de las grandes ventajas de utilizar este tipo de soluciones elementales es que, dadas las propiedades del potencial generado por una distribución de dobletes, las condiciones de contorno en la estela (2-39) y (2-43) se satisfacen de manera inmediata, no siendo necesario tratar dicha zona a la hora de resolver las ecuaciones.

La expresión de la función de Kernel se puede simplificar de la siguiente manera. Se define una nueva variable τ tal que

$$\tau \equiv \frac{\xi - Mr(\xi, y, z)}{1 - M^2} = \frac{\xi - Mr(\xi, y, z)}{\beta^2}, \quad (2-53)$$

que verifica

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{[\tau^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} &= \frac{d\xi}{r}, \\ \exp\left(\frac{i\omega}{U_\infty} \frac{\xi}{\beta^2}\right) \exp(-ikr) &= \exp\left(\frac{i\omega}{U_\infty} \tau\right). \end{aligned} \quad (2-54)$$

Así, introduciendo los cambios en la función Kernel,

$$K = \lim_{z \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{i\omega}{U_\infty} x\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{[x - Mr(x, y, z)]/\beta^2} \frac{\exp\left(\frac{i\omega}{U_\infty} \tau\right)}{[\tau^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} d\tau. \quad (2-55)$$

Derivando y tomando el límite, usando la relación

$$\left[\frac{Mx + r}{(x^2 + y^2)} \right]^2 \equiv \frac{1}{\left[\frac{x - Mr}{(1 - M^2)} \right]^2 + y^2}, \quad (2-56)$$

donde $r = (x^2 + \beta^2 y^2)^{1/2}$, se obtiene finalmente

$$K = \frac{M}{r} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{x - Mr}{(1 - M^2)}\right]^2 + y^2}} \exp\left[i \frac{\omega}{U_\infty} \frac{M}{\beta^2} (Mx - r)\right] \\ + \exp\left(-\frac{i\omega}{U_\infty} x\right) \int_{-\infty}^{[x - Mr(x,y,z)]/\beta^2} \frac{\exp\left(\frac{i\omega}{U_\infty} \tau\right)}{[\tau^2 + y^2]^{3/2}} d\tau. \quad (2-57)$$

Finalmente, comentar que la ecuación (2-49) se completa con la condición de contorno (2-38). Igualando dichas expresiones, se podrán hallar las fuerzas $\Delta\bar{p}$ que producen el movimiento y, conociendo estas fuerzas, la sustentación del ala y el momento de cabeceo se calculan sin más que hacer

$$L = \int_S (p_i - p_e) dS = \int_S [p'(x, y, z = 0^-) - p'(x, y, z = 0^+)] dS = \int_S \Delta p' dS, \quad (2-58)$$

$$M_0 = \int_S \Delta p' (x_0 - x) dS. \quad (2-59)$$

Es conveniente adimensionalizar dichas expresiones. Mediante el uso del Teorema Π [13], seleccionando tres variables dimensionalmente independientes, se tienen

$$C_L = \frac{L}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2 S}, \quad (2-60)$$

$$C_{M_0} = \frac{M_0}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2 S c_m}, \quad (2-61)$$

que corresponden al coeficiente de sustentación y coeficiente de momento de cabeceo respectivamente.⁸

2.4. Doublet Point Method

Desde finales de la década de los sesenta, los métodos numéricos se han convertido en herramientas clásicas para la resolución de problemas ingenieriles. El Doublet Point Method, desarrollado por sus autores en [7], es uno de ellos.

Consiste en dividir el ala en secciones pequeñas denominados paneles, en los cuales se supone que existe una fuerza de sustentación concentrada producida por un doblete matemático. Como se comentó en la introducción, el presente método, que funciona con exactitud tanto para flujos compresibles, incompresibles, estacionarios y no estacionarios, se basa en la integración de manera adecuada de las ecuaciones (en el sentido de las Integrales de Mangler [8]), en lugar de utilizar la línea de dobletes o de torbellinos en las que se basan los métodos Doublet Lattice (véase [4]) y Vortex Lattice (véase [16]), lo cual es mucho más simple.

El punto clave, y quizás la mayor aportación de los autores, es la aproximación que se realiza de la función Kernel, la cual presenta una gran singularidad. La manera en la que proceden se desarrolla a continuación.

En primer lugar, se realiza un cambio de notación para hacerla equivalente a la que se encuentra en [7].

Sea la ecuación (2-49) reescrita,

$$\frac{\bar{v}_z'}{U_\infty} = \bar{w} = \frac{1}{8\pi} \int_{FP} \Delta\bar{p}(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta, \quad (2-62)$$

⁸ $c_m = c_r/2$ es la semicuerda en la raíz

donde se ha redefinido $\Delta\bar{p}$ de manera que sea adimensional,

$$\Delta\bar{p} = -\frac{p'_+ - p'_-}{1/2\rho_\infty U_\infty^2}, \quad (2-63)$$

donde $p'_+ = p'(z = 0^+)$ y $p'_- = p'(z = 0^-)$ respectivamente. En lo que prosigue, toda cantidad referida a longitud se toma adimensionalizada con la semicuerda en la raíz ($c_m = c_r/2$). Además, se define la frecuencia reducida como

$$k = \frac{c_m \omega}{U_\infty}. \quad (2-64)$$

Así, la función Kernel puede ser expresada de la siguiente manera

$$K(x_0, y_0) = e_0^{-ikx} \left[\frac{M e^{ikX}}{R \sqrt{X^2 + r^2}} + B(k, r, X) \right], \quad (2-65)$$

donde

$$x_0 = x - \xi, \quad (2-66)$$

$$y_0 = y - \eta, \quad (2-67)$$

$$r = |y_0|, \quad (2-68)$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + \beta^2 r^2}, \quad (2-69)$$

$$X = \frac{x_0 - MR}{\beta^2}. \quad (2-70)$$

La función $B(k, r, X)$ representa una la integral que puede tomar valores complejos,

$$B(k, r, X) = \int_{-\infty}^X \frac{e^{ikv}}{[v^2 + r^2]^{3/2}} dv. \quad (2-71)$$

Dicha función puede ser separada en dos expresiones reales: B_R y B_I

$$B(k, r, X) = B_R(k, r, X) + i \cdot B_I(k, r, X), \quad (2-72)$$

donde

$$B_R(k, r, X) = \int_{-\infty}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{3/2}} dv, \quad (2-73)$$

$$B_I(k, r, X) = \int_{-\infty}^X \frac{\sin(kv)}{(v^2 + r^2)^{3/2}} dv. \quad (2-74)$$

Los valores de dichas integrales pueden obtenerse fácilmente sin más que utilizar los siguientes desarrollos en series realizados por los autores,

$$B_R(k, r, X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n U_{2n} - \frac{k^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2n}}{(n+1)(n!)^2} \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \frac{1}{2(n+1)} - \gamma - \ln\left(\frac{k}{2}\right) \right\}, \quad (2-75)$$

$$B_I(k, r, X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n U_{2n+1} + \frac{\pi k^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2n}}{(n+1)(n!)^2}, \quad (2-76)$$

donde $\gamma = 0.577215 \dots$ es la constante de Euler-Mascheroni. Cabe destacar que el sumatorio en m de la ecuación (2-75) toma el valor 0 para $n = 0$. El término U_m es una función de k , r y X , y se puede calcular con ayuda de la siguiente fórmula recurrente

$$U_m = \frac{k}{(m-2)m! \sqrt{X^2 + r^2}} - \frac{(kr)^2}{m(m-2)} U_{m-2}, \quad m \geq 3 \quad (2-77)$$

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{X^2 + r^2} (\sqrt{X^2 + r^2} - X)}, \quad (2-78)$$

$$U_1 = -\frac{k}{\sqrt{X^2 + r^2}}, \quad (2-79)$$

$$U_2 = -\frac{k^2}{2} \left\{ \frac{X}{\sqrt{X^2 + r^2}} + \ln(\sqrt{X^2 + r^2} - X) \right\}. \quad (2-80)$$

Es fácil comprobar que la función $B_R(k, r, X)$ es fuertemente singular cuando $r \rightarrow 0$ y $X > 0$. Este caso se trata en profundidad en el Anexo C. Singularidad de la función Kernel. Aproximación Ueda – Dowell, realizando un desarrollo en el sentido de las integrales impropias de Mangler [8]. Se llega a la conclusión de que, en los casos en los que se haga singular la función, se debe aplicar

$$B_R(k, r, X) \rightarrow -B_R(k, 0, -X) - \frac{\pi^2}{6\sigma_j^2} + k^2 \left[\ln\left(\frac{k\sigma_j}{2}\right) + \gamma - \frac{3}{2} \right], \quad (2-81)$$

donde $2\sigma_j$ representa el ancho del panel j .

Como se ha comentado anteriormente, se puede apreciar en la ecuación (2-62) que la fuerza generada no es más que la resultante de un campo presiones producido por una distribución de dobletes dispuesto en la dirección z y localizados en (ξ, η) (en lo que prosigue punto de centrado del doblete), véase [15] ó [17]. Por otro lado, el punto (x, y) en el cual se evalúa la velocidad vertical se denomina punto de colocación.

De manera análoga a los métodos Doublet Lattice y Vortex Lattice, se divide la forma en planta de la siguiente manera

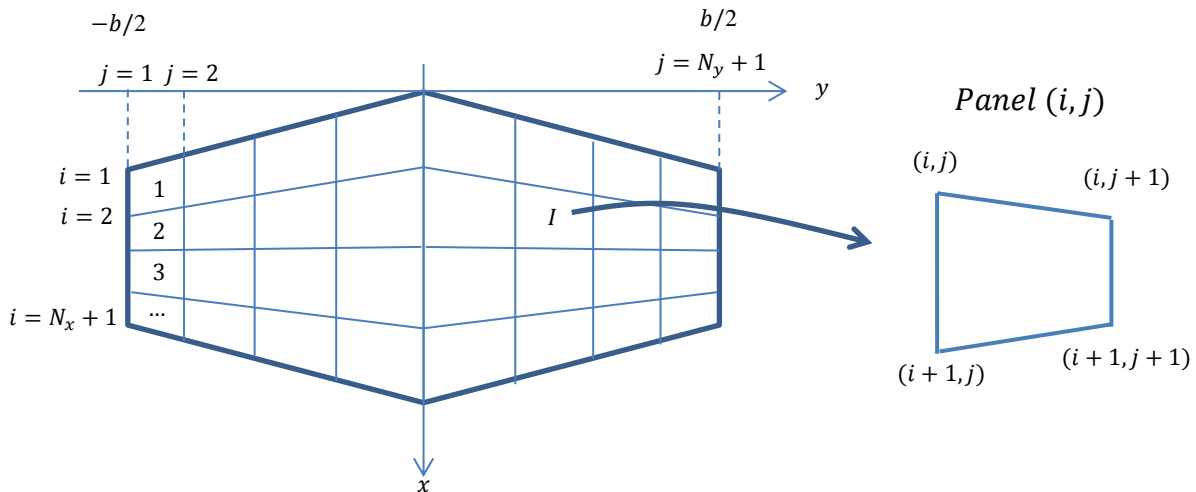


Figura 2-7. Panelado geométrico del ala. A la izquierda se muestra la numeración de los paneles del ala, a la derecha una vista de detalle de los vértices de un panel genérico.

Conviene denotar cada panel por un único índice: $I = (j - 1) \cdot N_x + i$. Nombrando los paneles así, se puede hacer que los vértices del panel (i, j) , en vez de ser los propuestos en la Figura 2-7, sean 1, 2, 3, y 4.

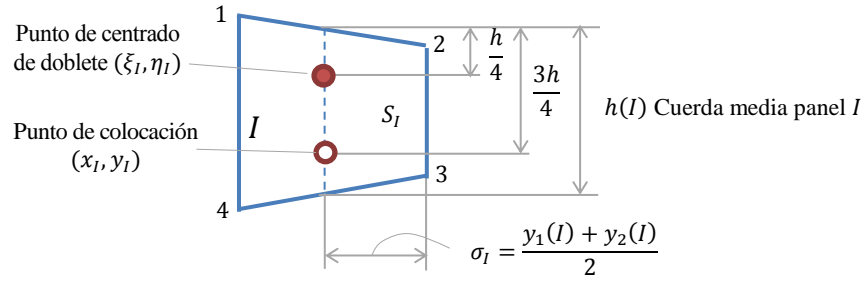


Figura 2-8. Panel I-ésimo. Puntos de centrado de doblete y colocación.

Aunque no se haya verificado de manera rigurosa que sea la distribución óptima, se sitúan los dobletes a un cuarto de la cuerda media del panel y el punto de colocación a tres cuartos (Figura 2-8), tal y como se hace en el método Doublet Lattice.

De esta manera, discretizando la ecuación (2-62), se obtiene

$$\bar{w}(x_I, y_I) = \bar{w}_I = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{N_p} \Delta \bar{p}(\xi_j, \eta_j) S_j K(x_I - \xi_j, y_I - \eta_j), \quad I = 1 \dots N_p. \quad (2-82)$$

Donde $N_p = N_x \cdot N_y$ es el número total de paneles y S_j la superficie del panel j . En forma matricial, se tiene

$$\mathbf{w} = \mathbf{D} \mathbf{p}, \quad (2-83)$$

donde

$$\mathbf{D} = [d_{IJ}] = \frac{S_J}{8\pi} K(x_I - \xi_J, y_I - \eta_J), \quad (2-84)$$

$$\mathbf{p} = \{\Delta \bar{p}_J\} = \{\Delta \bar{p}(\xi_J, \eta_J)\}, \quad (2-85)$$

$$\mathbf{w} = \{\bar{w}_I\} = \{\bar{w}(x_I, y_I)\}. \quad (2-86)$$

Adimensionalizando la condición de contorno (2-38), recordando que

$$\begin{aligned} w_I &= \Re(\bar{w}_I e^{i\omega t}), \\ z_a &= \Re(\bar{z}_a e^{i\omega t}), \end{aligned} \quad (2-87)$$

se obtiene

$$\bar{w}_I = \frac{\partial \bar{z}_a(x_I, y_I)}{\partial x} + ik \bar{z}_a(x_I, y_I). \quad (2-88)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se pueden hallar las fuerzas $\Delta \bar{p}$, y así poder introducir en las expresiones (2-60) y (2-61)

$$\Delta p' = \Re(\Delta \bar{p} e^{i\omega t}). \quad (2-89)$$

Mencionar que el resto de condiciones de contorno se satisfacen de manera inmediata, debido a que la distribución de dobletes propuesta cumple todas y cada una de ellas, tal y como sucede en el método Doublet

Lattice.

Finalmente, antes de dar paso al siguiente apartado, cabe destacar que, al ser un análisis numérico, las integrales (2-60) y (2-61) se convierten en sumatorios. Así, se tiene que las amplitudes complejas de los coeficientes de sustentación y momentos en función de la envergadura son:

$$\bar{C}_l(y_J) = \frac{\sum_{I=1}^{N_x} \Delta \bar{p}_I S_I}{\sum_I^{N_x} S_I}, \quad (2-90)$$

$$\bar{C}_{m_0}(y_J) = \frac{\sum_{I=1}^{N_x} \Delta \bar{p}_I S_I (x_0 - \xi_I)}{\sum_I^{N_x} S_I}, \quad (2-91)$$

y los totales son

$$\bar{C}_L = \frac{\sum_{J=1}^{N_y} \{\bar{C}_l(y_J) \sum_{I=1}^{N_x} S_I\}}{S}, \quad (2-92)$$

$$\bar{C}_{M_0} = \frac{\sum_{J=1}^{N_y} \{\bar{C}_{m_0}(y_J) \sum_{I=1}^{N_x} S_I\}}{S}. \quad (2-93)$$

Los coeficientes reales se obtienen sin más que hacer

$$C_L = \Re(\bar{C}_L e^{i\omega t}), \quad (2-94)$$

$$C_{M_0} = \Re(\bar{C}_{M_0} e^{i\omega t}). \quad (2-95)$$

2.5. Respuesta en el tiempo ante una entrada cualquiera

En los apartados anteriores se ha considerado una entrada armónica de la forma

$$z_a = \Re(\bar{z}_a e^{i\omega t}). \quad (2-96)$$

Tal y como se comentó al comienzo del apartado 2.3, cualquier función puede ser descompuesta en una suma de funciones armónicas mediante la transformada de Fourier (véase Anexo A. Transformada de Fourier). Es decir, sea la entrada en el tiempo $z_a(x, y, t)$, se puede reescribir como

$$z_a = \Re\left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} \bar{z}_{a_n} e^{i\omega_n t}\right), \quad (2-97)$$

donde N representa el número de puntos tomados para realizar la transformada de Fourier. De esta manera, obteniendo los coeficientes \bar{z}_{a_n} , se podrían calcular los correspondientes \bar{C}_{L_n} y $\bar{C}_{M_{0n}}$ mediante el método propuesto y, finalmente, componer la serie de Fourier de la siguiente manera

$$C_L = \Re\left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} \bar{C}_{L_n} e^{i\omega_n t}\right), \quad (2-98)$$

$$C_{M_0} = \Re\left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} \bar{C}_{M_{0n}} e^{i\omega_n t}\right). \quad (2-99)$$

Surge así la problemática de tener que ejecutar el método N veces, una por cada frecuencia de la serie de Fourier. Es por ello por lo que surge la necesidad de realizar una optimización del método para reducir así los costes de computación y no elevar demasiado los tiempos de ejecución de los análisis.

3 OPTIMIZACIÓN DEL MÉTODO

*Todo debe ser hecho tan simple como sea posible...pero
no más simple.*

- Albert Einstein -

Antes de dar paso al análisis de resultados, es conveniente optimizar el método todo lo posible. Para ello, se realiza un proceso de vectorización del programa, el cual estaba pensado inicialmente para ejecutarse mediante bucles. Con esto se reduce significativamente el tiempo de ejecución, lo que permite aumentar el número de paneles. Además, se realiza un estudio de sensibilidad del panelado geométrico del ala para determinar cómo afecta a los resultados obtenidos.

Por otro lado, dado que no todas las componentes de la serie de Fourier tienen el mismo peso sobre la solución global, se propone analizar el efecto de un truncamiento. El porcentaje de frecuencias eliminadas será fundamental para la precisión de los resultados finales.

Finalmente, para suavizar las oscilaciones producidas tanto por el truncamiento como por la propia serie de Fourier, conocidas como Efecto de Gibbs [18], se hará uso de los factores σ de Lanczos.

3.1. Vectorización. Panelado geométrico

En el método propuesto, tal y como se muestra en la ecuación (2-82), es necesario recorrer los elementos de varios vectores y/o matrices dos veces. Esto es

```
for I = 1:Np
  for J = 1:Np
     $x_0 = x(I) - \xi(J);$ 
     $y_0 = y(I) - \eta(J);$ 
    ...
  end
end
```

(3-1)

Para un número de paneles elevado, esto implica tiempos de ejecución muy altos. Es por ello por lo que se pretende eliminar estos bucles mediante operaciones matriciales equivalentes. Por ejemplo, la primera operación del bucle mostrado en (3-1) se podría reducir a lo siguiente

$$\begin{aligned}
 x_{0m} &= \begin{bmatrix} x(1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & & \vdots \\ x(I) & \cdots & x(I) \\ \vdots & & \vdots \\ x(N_p) & \cdots & x(N_p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi(1) & \cdots & \xi(J) & \cdots & \xi(N_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi(1) & \cdots & \xi(J) & \cdots & \xi(N_p) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} x(1) \\ \cdots \\ x(I) \\ \cdots \\ x(N_p) \end{bmatrix} \cdot [1 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 1] - \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\xi(1) \quad \cdots \quad \xi(J) \quad \cdots \quad \xi(N_p)].
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

Eliminando los bucles procediendo de esta manera, se ha conseguido reducir el tiempo de ejecución en torno a un 99.5%. A continuación, se muestra un estudio de sensibilidad del número de paneles y duraciones, antes y después de optimizar, así como de los valores de C_L obtenidos, para el siguiente caso

Pitching motion

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_a &= \frac{-5\pi}{180} (x - x_e), \quad x_e = 0.5, \quad k = \frac{\omega c_m}{U_\infty} = 0.1, \\
 \bar{w} &= ik\bar{z}_a + \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

Cálculos para $k = 0.1, AR = 10, M = 0.2$						
N_x	N_y	N_p	Programa sin optimizar		Programa optimizado	
			t (s)	$\Re(\bar{C}_L)$	t (s)	$\Re(\bar{C}_L)$
5	10	50	12.2444	0.2958	0.0638	0.2958
5	20	100	48.7155	0.3693	0.1356	0.3693
5	30	150	109.0620	0.3917	0.2783	0.3917
10	20	200	196.0676	0.3342	0.3020	0.3342

Tabla 3-1. Comparación de tiempos de duración del método con bucles vs método vectorizado. En rojo los tiempos sin optimizar, en verde optimizados.

Programa optimizado				
Cálculos para $k = 0.1, AR = 10, M = 0.2$				
N_x	N_y	N_p	t (s)	$\Re(\bar{C}_L)$
5	10	50	0.0638	0.2958
5	20	100	0.1356	0.3693
5	30	150	0.2783	0.3917
10	20	200	0.3020	0.3342
15	30	450	1.4036	0.3510

20	30	600	2.4754	0.3406
30	30	900	5.3778	0.3268
40	30	1200	9.5237	0.3177
15	40	600	2.4614	0.3694
20	20	400	1.1635	0.3028
20	30	600	2.4221	0.3406
20	40	800	4.3277	0.3606
20	50	1000	6.7835	0.3726
25	30	750	10.4495	0.3669
30	40	1200	9.5281	0.3488
30	50	1500	16.3825	0.3623
40	40	1600	17.2631	0.3408
50	50	2500	44.3857	0.3501
70	70	4900	177.5821	0.3616
50	100	5000	177.5989	0.3810

Tabla 3-2. Estudio de sensibilidad Número de paneles vs tiempo de ejecución del programa optimizado.

Por un lado, se puede apreciar en la Tabla 3-2 que el método es sensible al número de paneles en la envergadura (N_y) y en la cuerda (N_x). En el primer caso, se aprecia que, a mayor número de paneles en la envergadura (verde), el valor de $\Re(\overline{C_L})$ aumenta sensiblemente. Por otro lado, aumentando el número de paneles en la cuerda para N_y fijo (amarillo), se aprecia que el valor de $\Re(\overline{C_L})$ disminuye. Este efecto se debe a que no se ha tenido en cuenta que una de las dimensiones, en este caso la envergadura, es mucho mayor que la otra. Por ejemplo, para un ala rectangular, se tiene

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{b}{c_r}. \quad (3-4)$$

Es decir, para un alargamiento $AR = 10$, la dimensión en dirección y es diez veces mayor que en x . Manteniendo esta relación en el número de paneles, se puede observar que los resultados varían en menor orden de magnitud.

Programa optimizado				
<i>Cálculos para $k = 0.1, AR = 10, M = 0.2$</i>				
N_x	$N_y = N_x * AR$	N_p	$t(s)$	C_L
5	50	250	0.4589	0.4033
7	70	490	1.6790	0.4025
10	100	1000	6.7662	0.4018
15	150	2250	35.1042	0.4013
20	200	4000	112.8575	0.4011

Tabla 3-3. Modificación del panelado. Relación $N_y = N_x \cdot AR$.

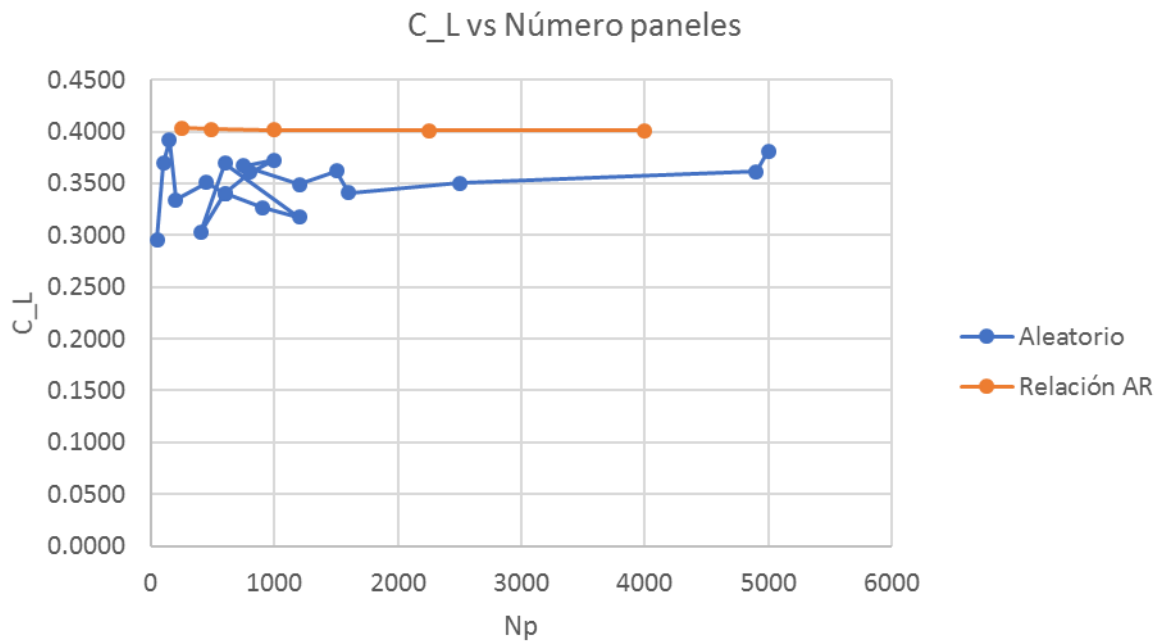


Figura 3-1. Comparación panelado aleatorio vs relación de alargamiento. Se comprueba cómo incluso para un número de paneles pequeño, los resultados siguiendo una relación de alargamiento mejoran notablemente y se mantienen aproximadamente constantes.

Como se aprecia en la Tabla 3-3 y en la Figura 3-1, manteniendo una relación idéntica a la que mantienen la cuerda y la envergadura en el panelado, los resultados son mucho mejores.

Finalmente, se muestra la relación tiempo – número de paneles del método optimizado y sin optimizar.

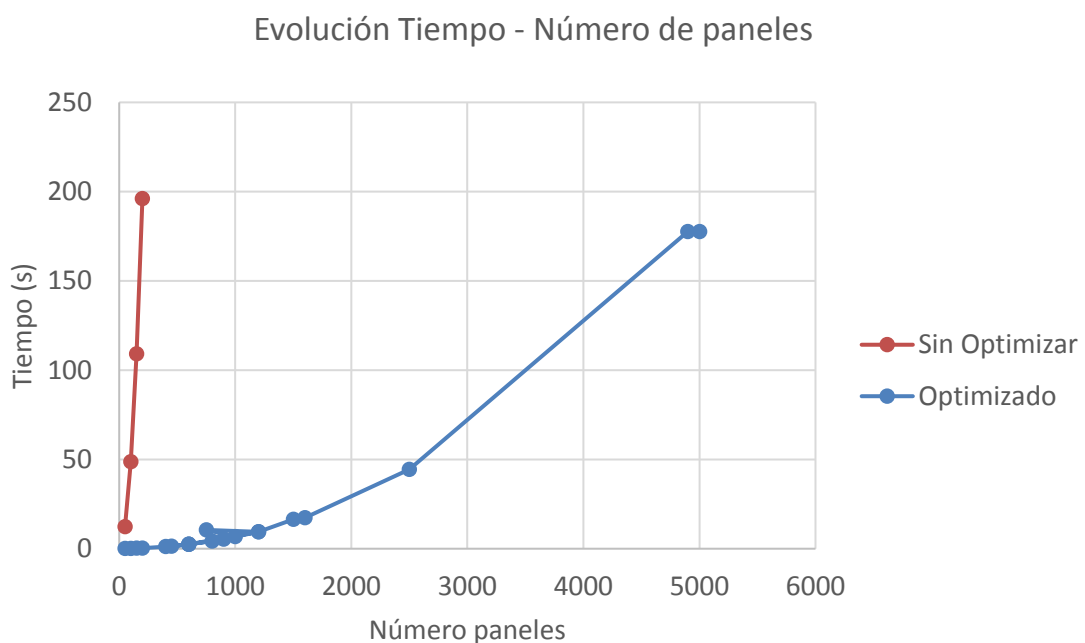


Figura 3-2. Evolución Tiempo vs Número de Paneles. Se comprueba que el programa optimizado mejora de manera notable el tiempo de ejecución, permitiendo imponer un mayor número de paneles.

3.2. Truncamiento

Como ya se ha comentado, no todas las frecuencias tienen el mismo peso sobre la solución final. Esto es debido a que algunos de los coeficientes de Fourier de la señal de entrada, \overline{z}_{an} , son significativamente mayores que otros. Así, se realizará un estudio eliminando los coeficientes que no superen en un porcentaje a la amplitud máxima. Esto es,

$$\begin{aligned}
 n_v &= \left(-\frac{N}{2} : \frac{N}{2} - 1 \right); \\
 \text{for } p &= 1:N \\
 n &= n_v(p); \\
 \text{if } |\overline{z}_{an}| &< \text{porcentaje} * \max(\overline{z}_{an}) \\
 |\overline{z}_{an}| &= 0; \\
 \text{end} \\
 \text{end}
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

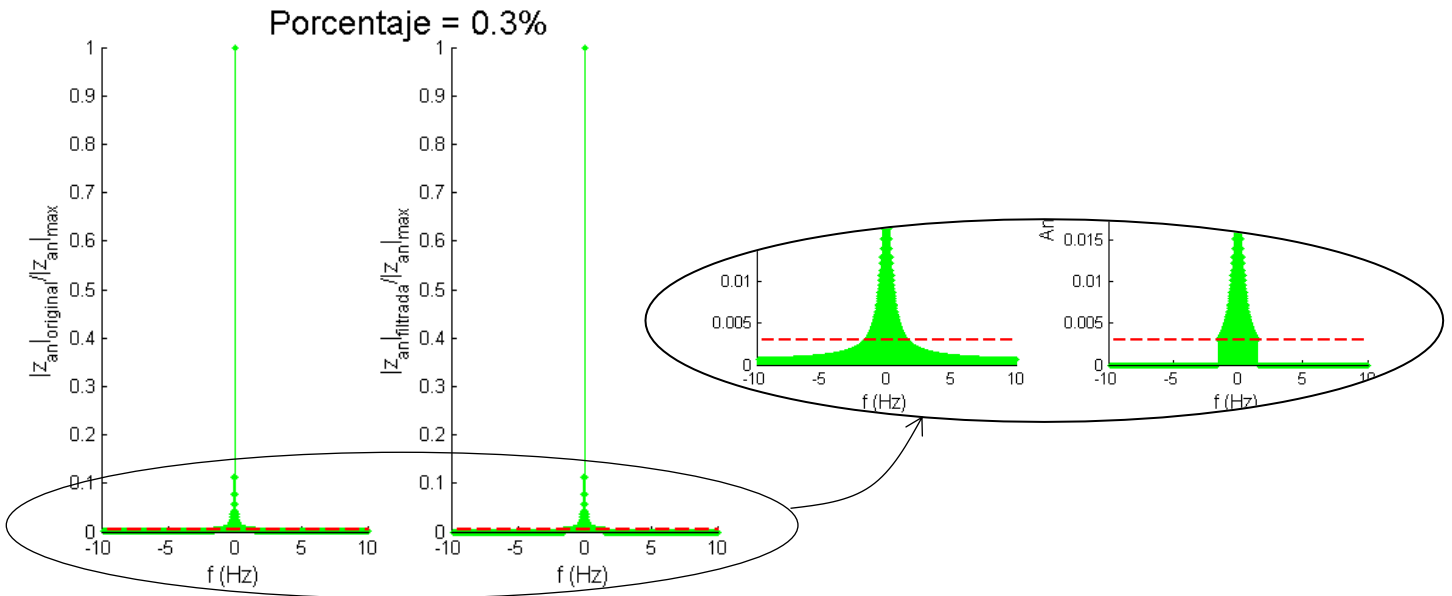


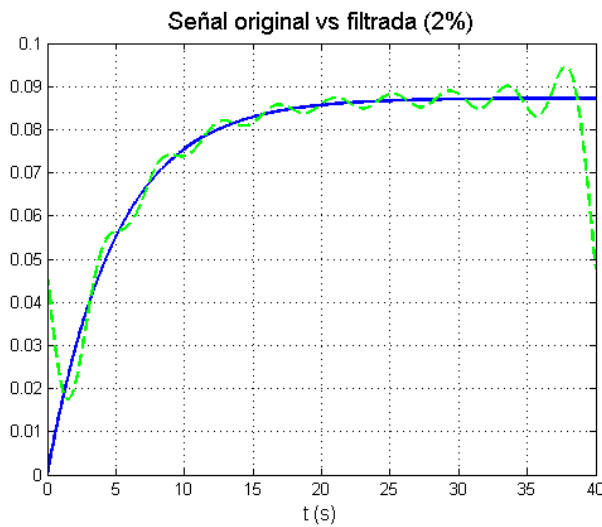
Figura 3-3. Ejemplo descrito en (3-5) con porcentaje = 0.003. Señal original: $z_a(t) = (1 - e^{-t})$.

Así, se muestran el efecto de este porcentaje en las siguientes figuras con la siguiente señal original

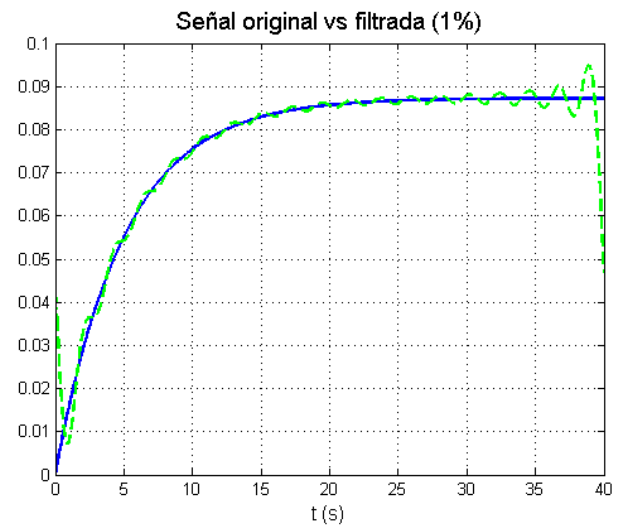
$$z_a(t) = \frac{5\pi}{180} (1 - e^{-t/5}), \tag{3-6}$$

tomando 2^{10} puntos para realizar la transformada de Fourier.

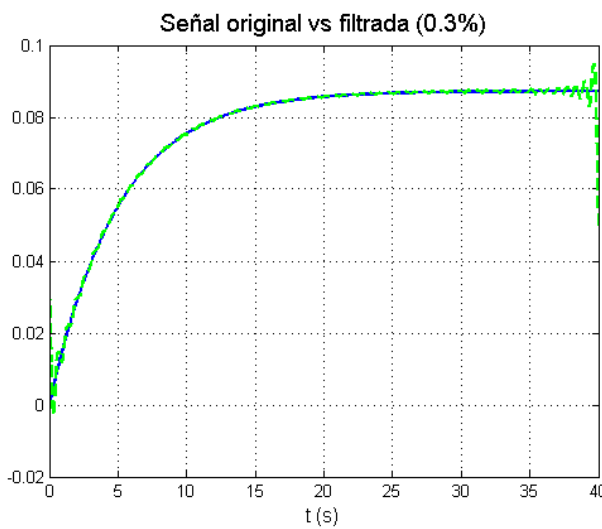
Como se aprecia en la Figura 3-4, el porcentaje tendrá un efecto muy importante tanto en el resultado obtenido como en el tiempo de ejecución del programa, ya que podemos suponer aproximadamente proporcional el número de frecuencias con la duración. Se deberá tomar una solución de compromiso para conseguir buenos resultados sin elevar demasiado la duración.



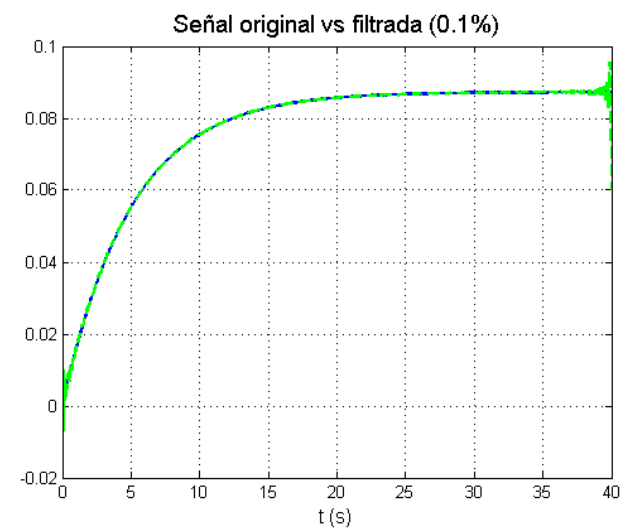
Número de coeficientes distintos de cero: 19



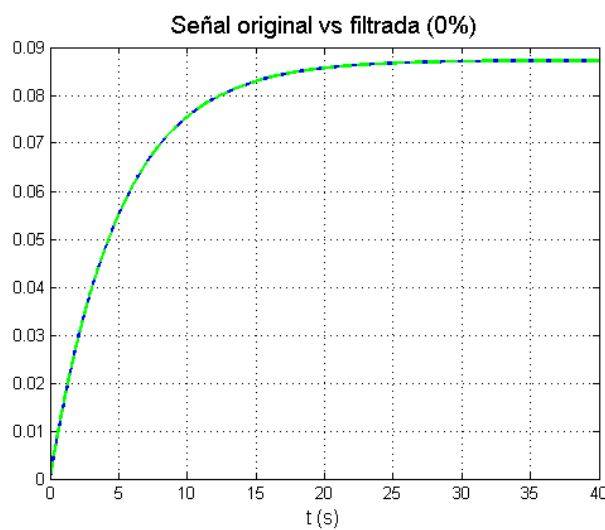
Número de coeficientes distintos de cero: 37



Número de coeficientes distintos de cero: 123



Número de coeficientes distintos de cero: 387



Número de coeficientes distintos de cero: 1024

Figura 3-4. Efecto del porcentaje (3-5) en la Transformada de Fourier. En azul la señal original, en verde (discontinuo) la señal filtrada.

3.3. Factores de Lanczos

H. Wilbraham observó en 1848 que, en puntos cercanos a una discontinuidad de una función f , las sumas parciales de la serie de Fourier de f presentaban un comportamiento oscilatorio anómalo que hacía que las gráficas de las sumas parciales excedieran en aproximadamente el 9% del valor del salto de la discontinuidad. Este trabajo de Wilbraham cayó en el olvido hasta años más tarde, en torno a 1899, cuando el físico-matemático J. W. Gibbs investigó y explicó este fenómeno basándose en la no convergencia uniforme de la serie de Fourier en las cercanías de un punto de discontinuidad. Este fenómeno se conoce como fenómeno de Gibbs (o fenómeno de Gibbs-Wilbraham) [19].

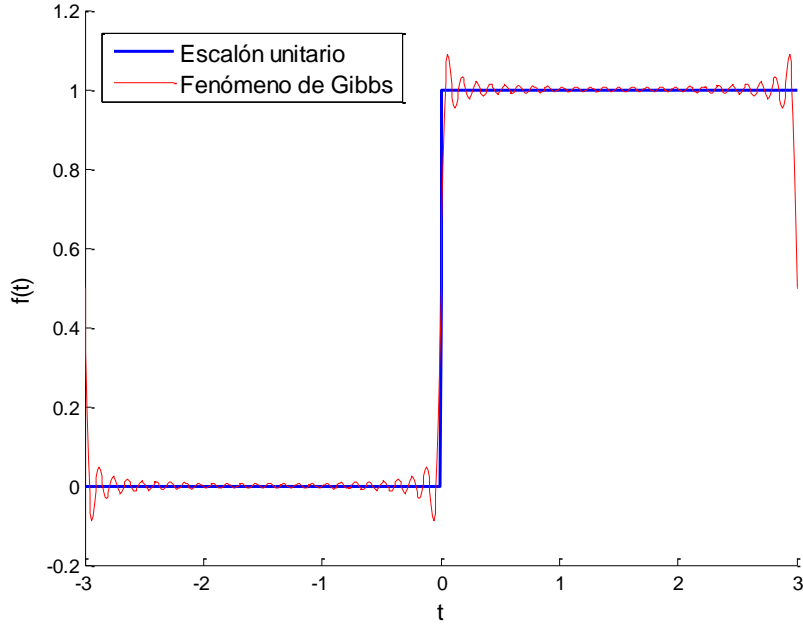


Figura 3-5. Fenómeno de Gibbs ($N=50$). En azul se muestra un escalón unitario, en rojo el escalón al utilizar las series de Fourier.

Cornelius Lanczos [18] desarrolló una serie de factores que reducían estas oscilaciones no deseadas. Estos factores, denominados sigma (σ), surgen de realizar un promediado local tomando como intervalo el periodo de mayor frecuencia (T/N). Sea f_L la función modificada por los factores de Lanczos:

$$f_L = \frac{1}{T/N} \int_{t-\frac{T}{2N}}^{t+\frac{T}{2N}} f(\xi) d\xi. \quad (3-7)$$

Incluyendo la transformada de Fourier:

$$f_L = \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{N}{T} \int_{t-\frac{T}{2N}}^{t+\frac{T}{2N}} c_n e^{\frac{i2\pi n}{T}\xi} d\xi. \quad (3-8)$$

Operando, se obtiene

$$\begin{aligned} f_L &= \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{N}{T} c_n \frac{T}{i2\pi n} \left[e^{\frac{i2\pi n}{T}(t+\frac{T}{2N})} - e^{\frac{i2\pi n}{T}(t-\frac{T}{2N})} \right] = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{\frac{i2\pi n}{T}t} \frac{N}{i2\pi n} \left[e^{\frac{i\pi n}{N}} - e^{-\frac{i\pi n}{N}} \right] \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{\frac{i2\pi n}{T}t} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\frac{\pi n}{N}} = \sum_{n=-N}^{n=N} \sigma_n c_n e^{\frac{i2\pi n}{T}t}, \end{aligned} \quad (3-9)$$

donde

$$\sigma_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\frac{\pi n}{N}} = \text{sinc}\left(\frac{\pi n}{N}\right), \quad (3-10)$$

son los factores de Lanczos. Cabe destacar que, mediante este promediado, se modifica la influencia de las frecuencias más altas (causantes de las oscilaciones), provocando que la función pase a ser más suave. Solo sería idéntica en el caso de que no se truncase la serie. Nótese que para $n = 0$, $\sigma_0 = 1$.

Además, este efecto (alisado) se puede intensificar elevando estos factores a k , siendo $k = 1, 2, 3, \dots$

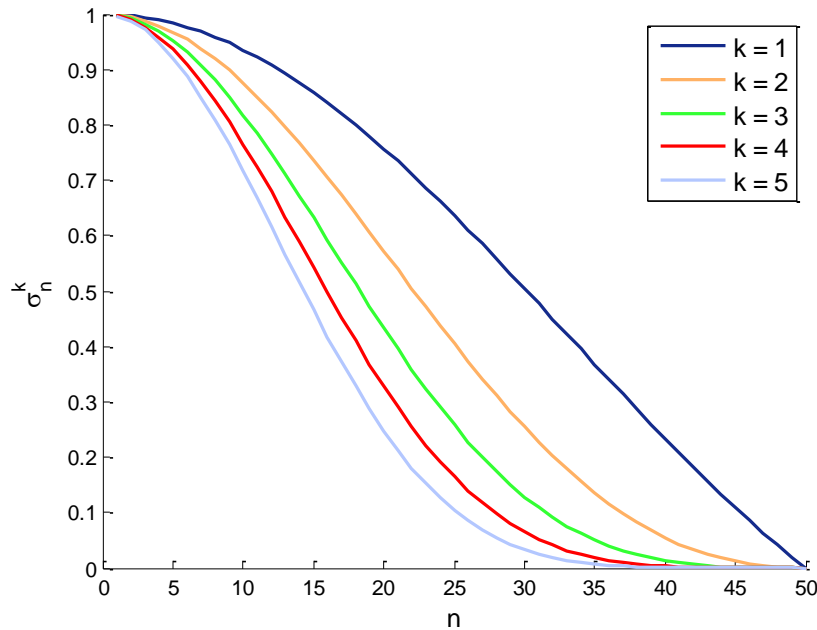


Figura 3-6. Factores σ_n^k de Lanczos para $N = 50$. A medida que k aumenta, se disminuye el efecto de las frecuencias más altas.

Así, aplicando estos factores a un escalón unitario:

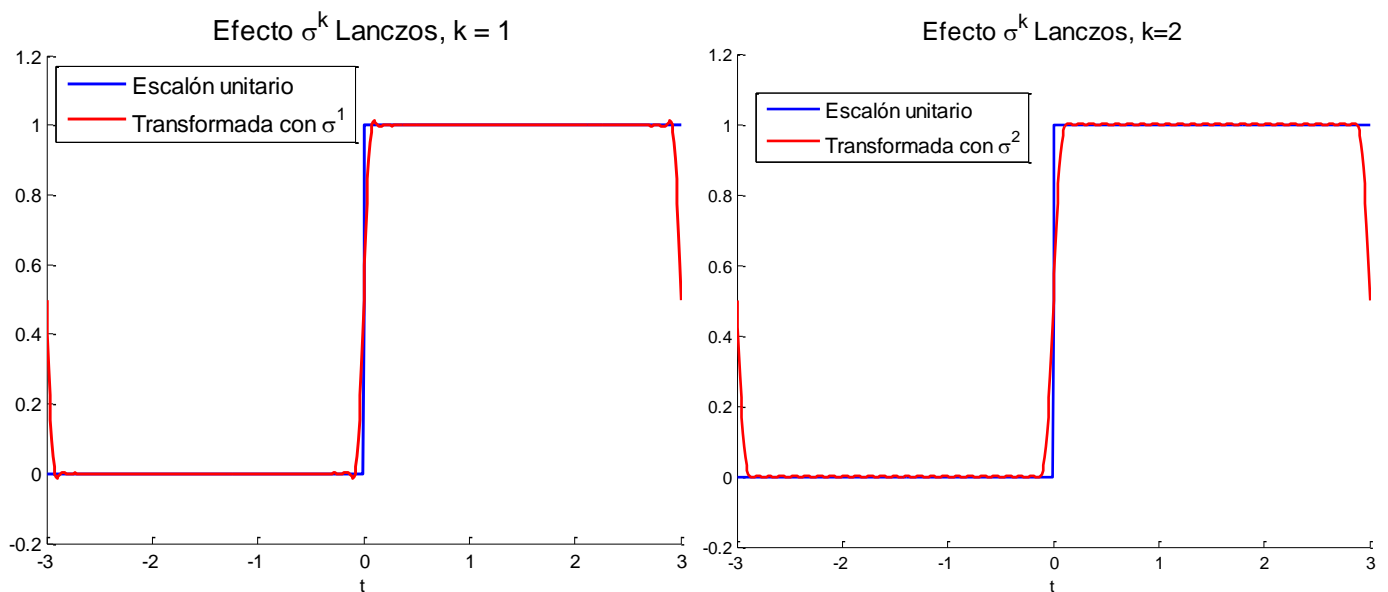


Figura 3-7. Efecto σ^k de Lanczos ($N=50$) para $k=1$ (izquierda) y $k=2$ (derecha)

Como se ve en las figuras anteriores, la disminución en las oscilaciones es notable. Esto permitirá, además de obtener resultados mucho mejores, reducir el número de puntos con el que se toma la transformada de Fourier.

4 RESULTADOS

Cuanto más hacemos, más podemos hacer.

- William Hazlitt -

En el presente apartado se abordarán algunos problemas clásicos de la aeroelasticidad para comprobar la veracidad del método propuesto. Cualquier método numérico requiere de una comprobación puesto que todos ellos se basan en modelos matemáticos que intentan realizar aproximaciones a los fenómenos físicos existentes en la realidad. Si los resultados que se obtienen no fueran correctos, significaría que la interpretación que se hace de ellos es errónea y podría causar confusión.

En primer lugar, se realizan los experimentos llevados a cabo por Ueda-Dowell en [7]. Tras ello, se realizará una comparación con el método Vortex Lattice, particularizado para la analogía de Prandtl-Glauert. Por otro lado, en cuanto a al estudio de los efectos no estacionarios, se analizarán algunos problemas clásicos de la aeroelasticidad como el problema de Wagner, que comprende el estudio del transitorio cuando hay un cambio súbito en el ángulo de ataque, o el de Küssner, que abarca la respuesta ante una ráfaga vertical. Finalmente, se estudiarán algunos casos que pueden resultar de interés.

4.1. Comparación con resultados obtenidos por Ueda - Dowell

Como punto de partida, se han realizado los mismos análisis que aparecen en [7] para así poder comprobar la exactitud del método.

En primer lugar, cuando la frecuencia reducida tiende a cero, el flujo se convierte en estacionario. Para un ala rectangular de $AR = 2$ (véase Figura 4-1) en régimen estacionario, se calcula la distribución de presiones (dividida por el ángulo de ataque) y la pendiente de la curva de sustentación en función de la envergadura (C_{l_α})⁹ para tres valores de N_x . El número de paneles en la envergadura se fija en $N_y = 5$. Los resultados se muestran

⁹ En la Teoría Linealizada, se tiene $C_{l_\alpha} = C_l/\alpha$

en Figura 4-2 y Figura 4-3.

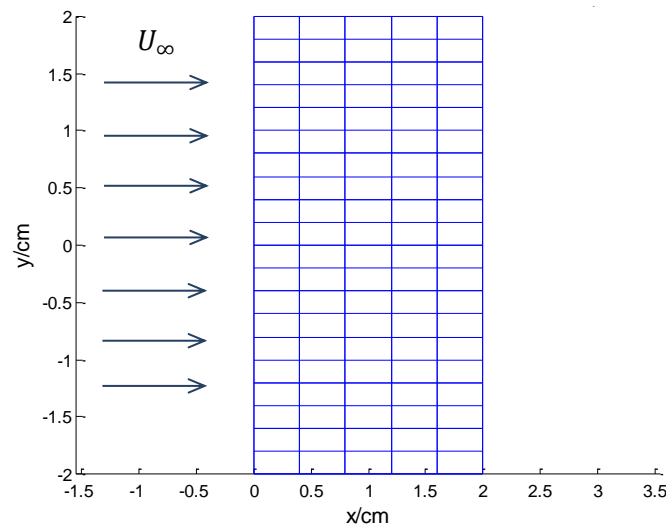


Figura 4-1. Panelado geométrico ala rectangular ($AR = 2$, $N_x = 5$, $N_y = 10$).

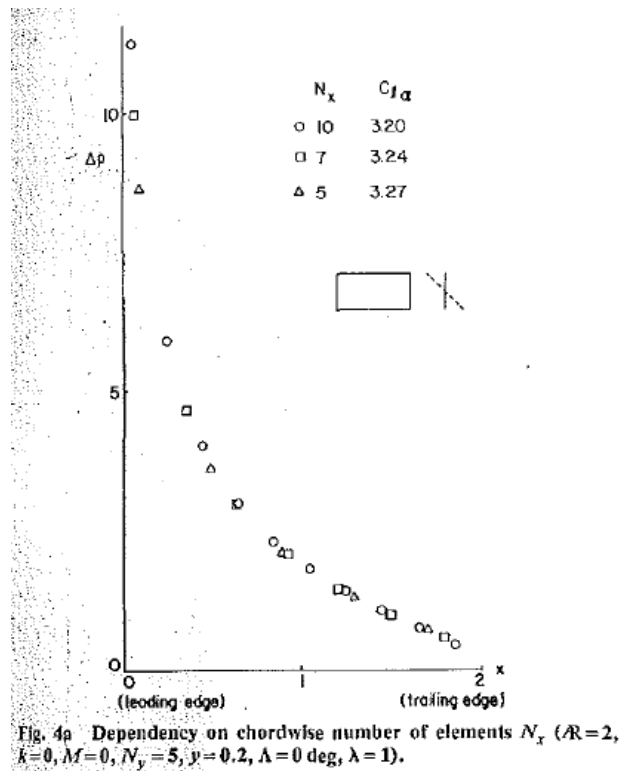
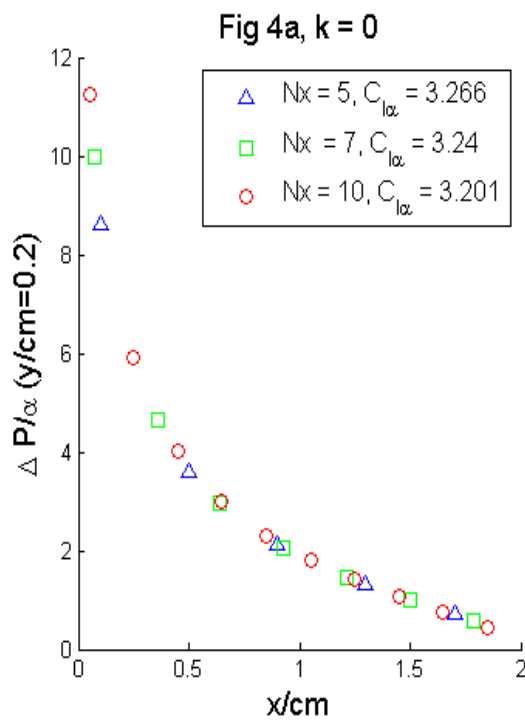


Figura 4-2. $\frac{\Delta \bar{p}}{\alpha}$ vs $\frac{x}{c_m}$ Ala rectangular, $k = 0$, $M \approx 0$, $AR = 2$, $N_y = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).

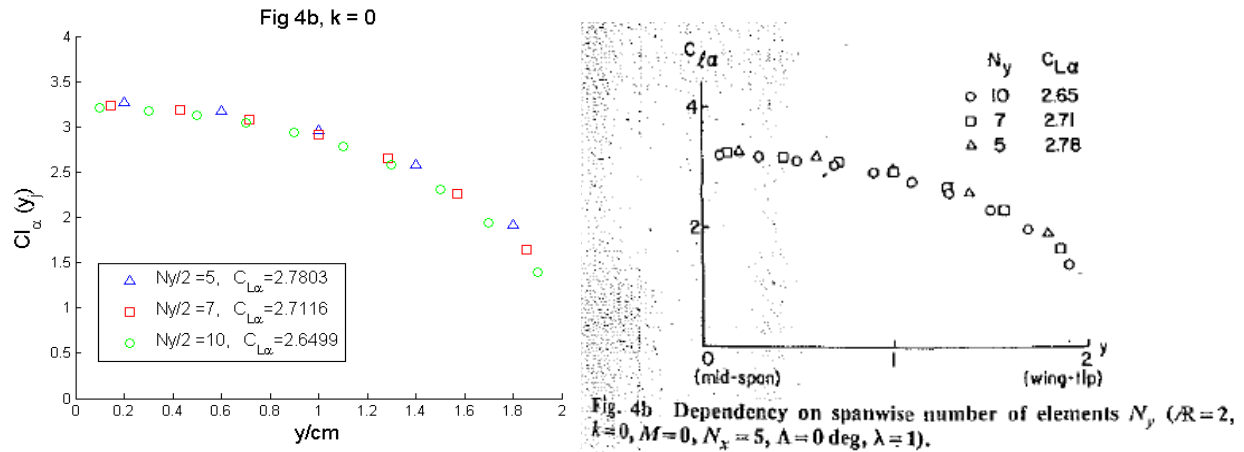


Figura 4-3. $C_{l_\alpha}(y)$ vs $\frac{y}{c_m}$ Ala rectangular, $k = 0$, $M \approx 0$, $AR = 2$, $N_x = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).

Se puede apreciar en las imágenes que incluso para un pequeño número de elementos se obtienen resultados satisfactorios. Cabe destacar que el programa proporciona valores de C_{l_α} mayores para un menor número de elementos en la envergadura, debido a que, realmente, el gradiente de presiones en la punta se hace nulo. Para un número pequeño de paneles esto no se cuantifica y el resultado es menos exacto.

Para el caso no estacionario, en el cual el ala rectangular oscila en torno a un eje situado en el punto medio, los resultados siguen siendo exactos (véase Figura 4-4).

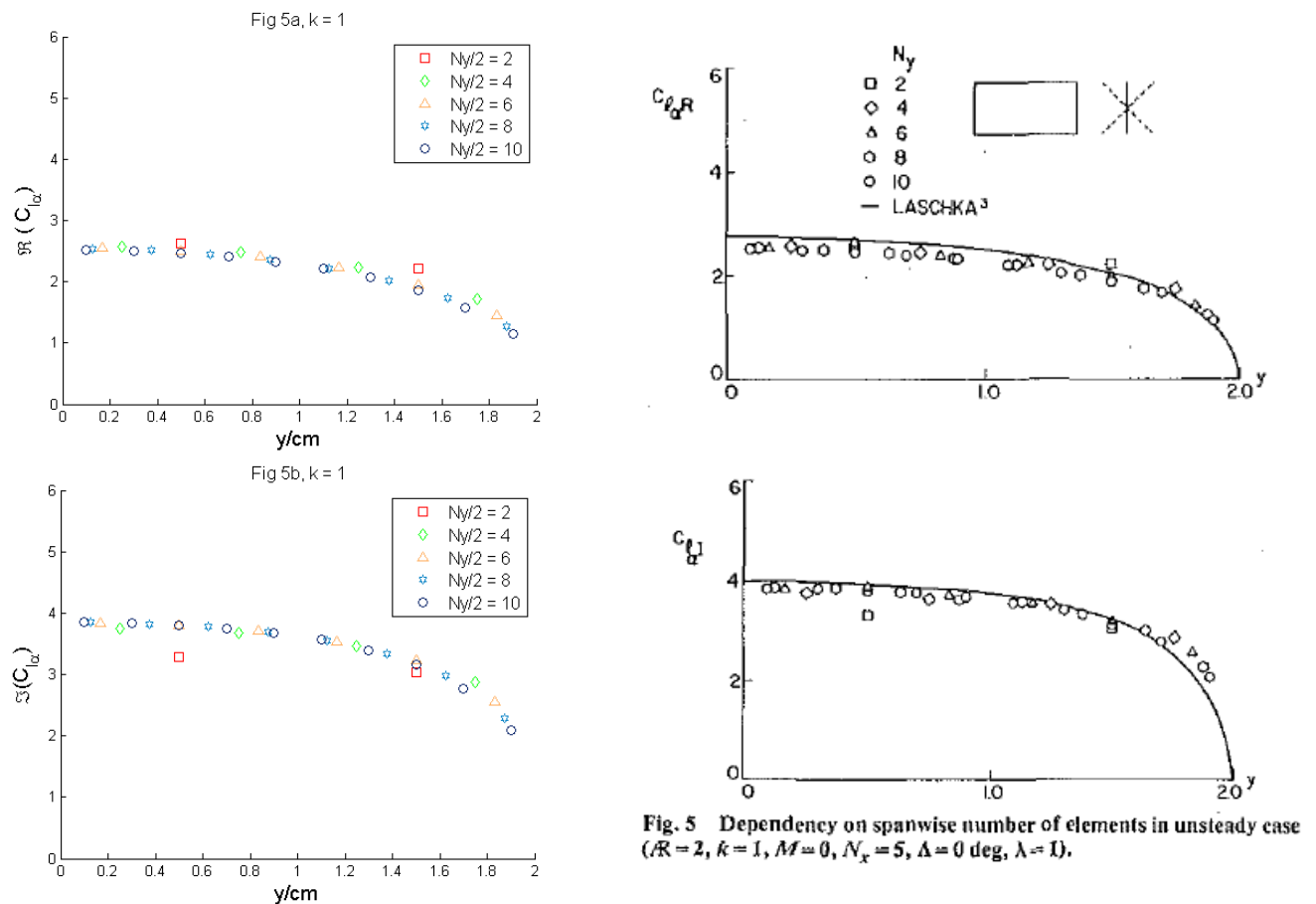


Figura 4-4. $C_{l_{\alpha,R,I}}(y)$ vs $\frac{y}{c_m}$ Ala rectangular, $k = 1$, $M \approx 0$, $AR = 2$, $N_x = 5$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).

En las siguientes figuras se muestran el coeficiente de sustentación y de momentos total para el ala rectangular oscilando en torno a $c_r/2$ (pitching motion¹⁰) para el caso incompresible ($M < 0.3$), esto es

$$z_a = \Re(\bar{z}_a e^{i\omega t}), \text{ con } \bar{z}_a = -\bar{\alpha}(x - x_e), \quad x_e = c_r/2 \quad (4-1)$$

$$\bar{w}_I = -[ik(x_I - x_e) + 1]\bar{\alpha} \quad (4-2)$$

Se representa el módulo de la amplitud compleja y la fase por separado.

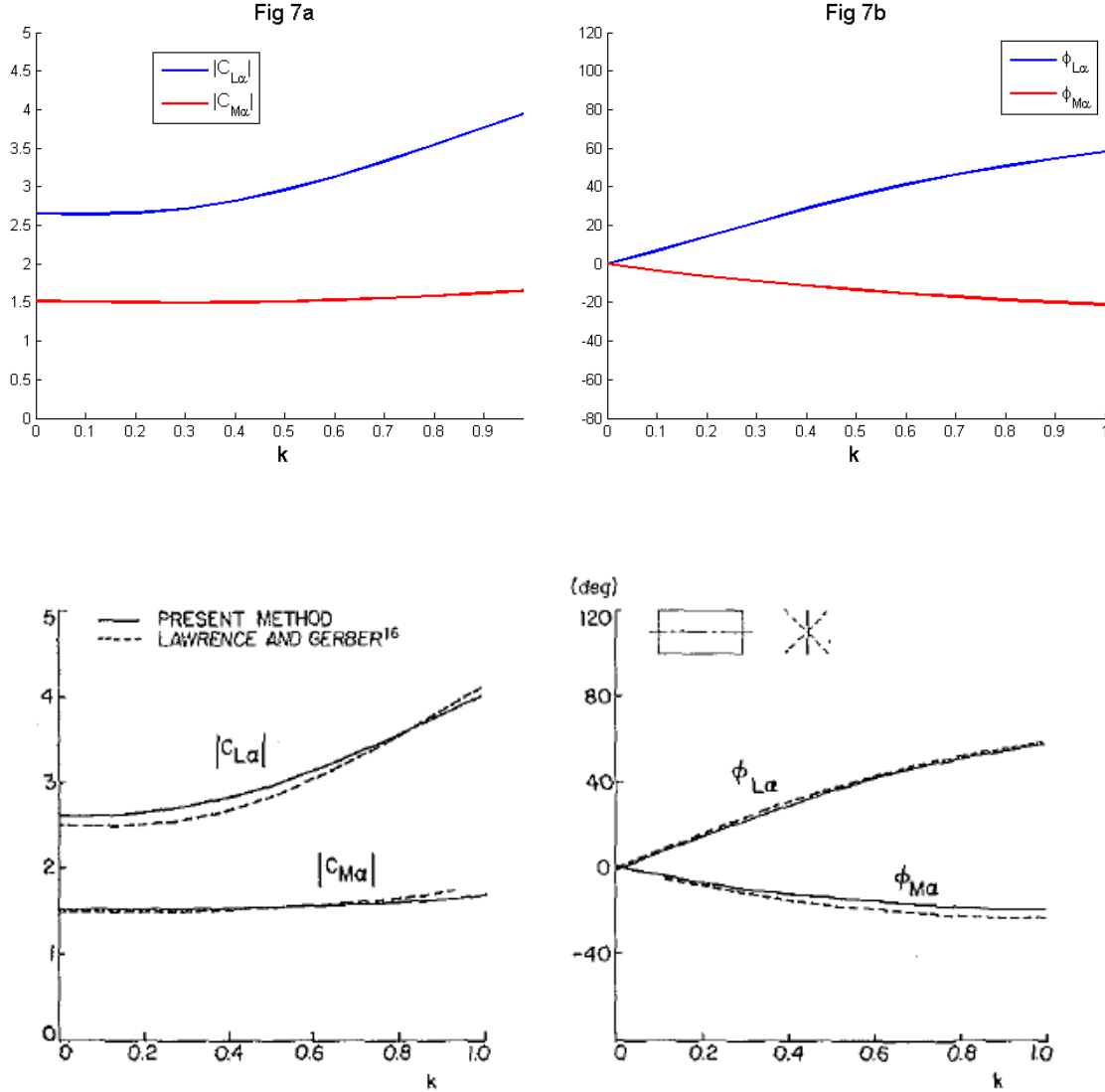


Fig. 7 Lift and moment coefficients vs reduced frequency ($AR=2$, $M=0$, $N_x=5$, $N_y=10$, $\Lambda=0$ deg, $\lambda=1$).

Figura 4-5. $|C_{L\alpha}|$, $|C_{M\alpha}|$, $\phi_{C_{L\alpha}}$, $\phi_{C_{M\alpha}}$ vs k . Ala rectangular, $M \approx 0$, $AR = 2$, $N_x = 5$, $N_y = 10$. Resultados MATLAB (arriba) y [7] (abajo).

Por otro lado, se analiza un ala con flecha ($\psi = 45^\circ$) sin estrechamiento, (véase Figura 4-6) oscilando en la dirección del eje z con amplitud unidad (heaving motion, Figura 4-7) y ángulo de ataque constante, esto es

$$z_a = \Re[-\bar{h}(x, y)e^{i\omega t}], \text{ con } \bar{h}(x, y) = 1, \quad (4-3)$$

¹⁰ Oscila el ángulo de ataque para una altura constante

$$\bar{w}_l = -ik, \quad (4-4)$$

para el caso compresible ($M = 0.8$) e incompresible ($M = 0$).

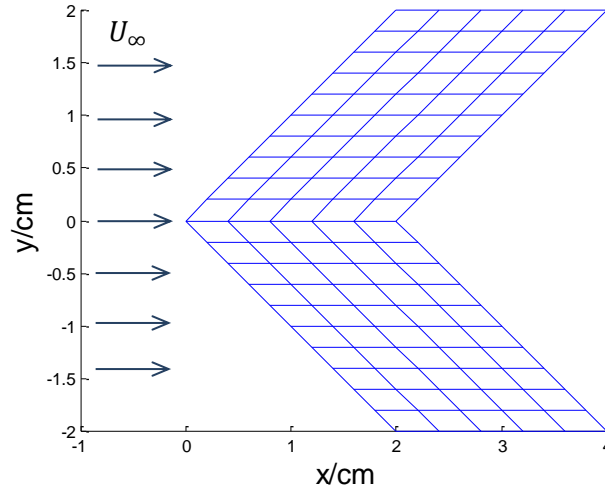


Figura 4-6. Panelado geométrico ala en flecha ($AR = 2$, $\psi = 45^\circ$, $\lambda = 1$, $N_x = 5$, $N_y = 10$).

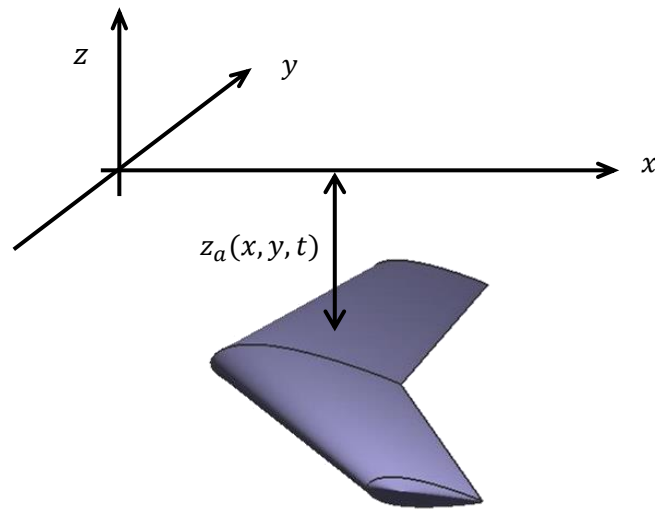


Figura 4-7. Heaving motion (imagen del ala obtenida con el software informático XFLR5).

En la Figura 4-8 se muestra la evolución del módulo del coeficiente de sustentación y del ángulo de fase en función de la envergadura.

Igualmente, se realizan análisis similares para alas de diferente geometría (ala delta y ala hexagonal) oscilando de forma distinta, obteniendo resultados similares. En definitiva, se comprueba que los resultados obtenidos son idénticos a los expuestos en [7].

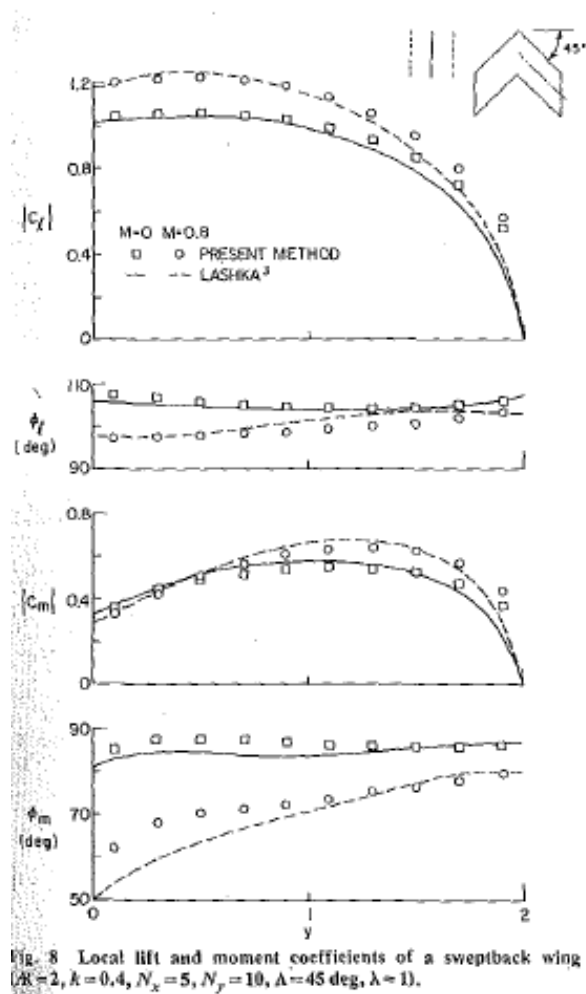
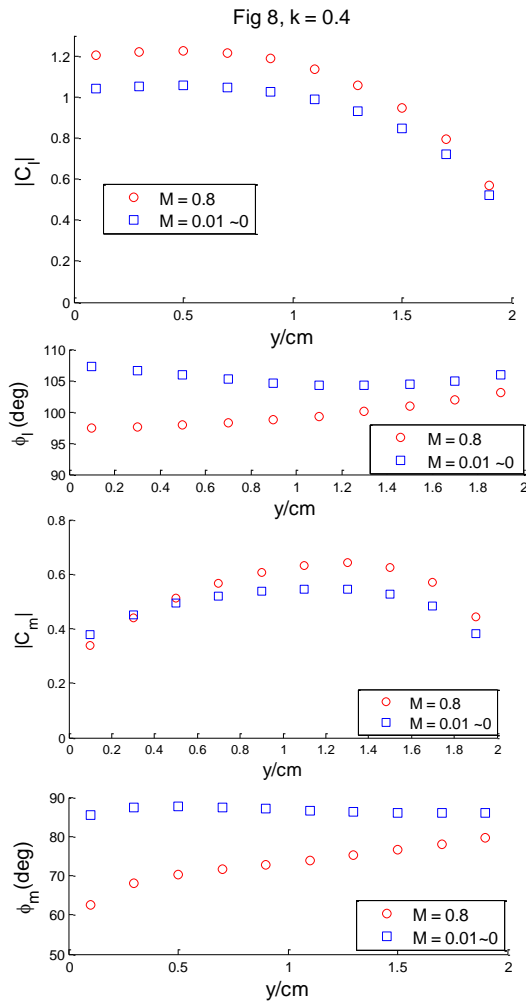


Fig. 8 Local lift and moment coefficients of a sweptback wing ($AR=2$, $k=0.4$, $N_x=5$, $N_y=10$, $\Lambda=45^\circ$, $\lambda=1$).

Figura 4-8. $|C_l|$, $|C_m|$, ϕ_{C_l} , ϕ_{C_m} vs y/cm . Ala en flecha sin estrechamiento ($\psi = 45^\circ$, $\lambda = 1$), $AR = 2$, $k = 0.4$, $N_x = 5$, $N_y = 10$. Resultados MATLAB (izquierda) y [7] (derecha).

4.2. Comparación con el Vortex Lattice Method

La Ecuación de Ondas (2-25) simplificada para el caso estacionario se puede reescribir como

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} = 0. \quad (4-5)$$

Esta ecuación, para el caso incompresible ($M_\infty^2 \ll 1$) se puede simplificar, obteniendo la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi' = 0. \quad (4-6)$$

Este es el problema original para el que se ideó el Vortex Lattice. A continuación, se comparan en la Figura 4-9 los resultados obtenidos con el DPM para el caso $k = 0$, $M = 0.1 \approx 0$, es decir régimen estacionario e incompresible, con los que se obtienen mediante el Vortex Lattice [16]. Como se puede apreciar, los resultados son muy similares.

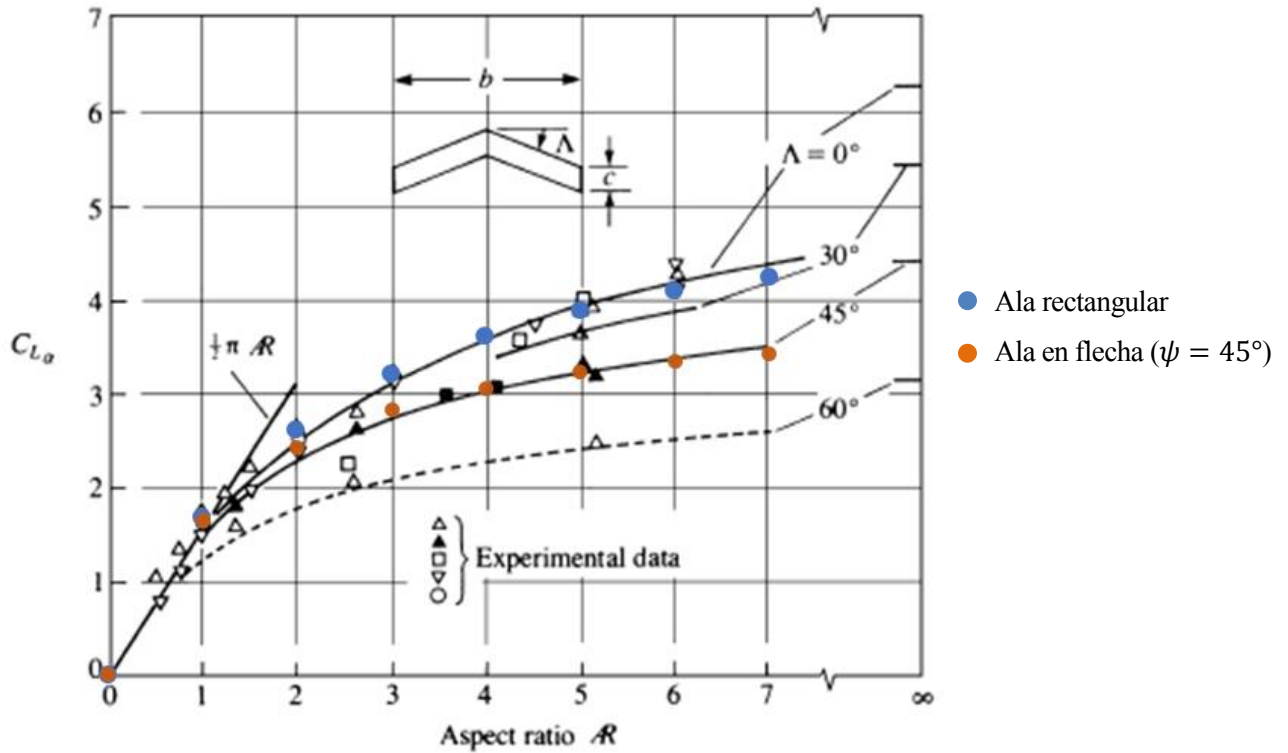


Figura 4-9. DPM vs VLM. Imagen de fondo obtenida de [16].

AR	$C_{L\alpha}$	
	$\psi = 0^\circ$	$\psi = 45^\circ$
0	0	0
1	1.6802	1.643
2	2.6245	2.4147
3	3.2229	2.815
4	3.6219	3.0557
5	3.9015	3.2178
6	4.1058	3.3356
7	4.2602	3.4262

Tabla 4-1. Resultados mostrados en Figura 4-9.

Por otro lado, para el caso compresible ($M_\infty \approx 0.3 - 0.85$), el valor de $M_\infty^2 \sim 1$, luego no se podría despreciar frente a la unidad. Es por ello que Prandtl y Glauert desarrollaron un cambio de variable para poder convertir el problema compresible en una ecuación análoga a la (4-6) y resolverlo con el método Vortex Lattice [14], [20].

Cambio de variable: Sean (x, y, z) las variables del problema inicial, y (X, Y, Z) las del cambio de variable. Por otro lado, sea Φ' el nuevo potencial de velocidades de perturbación. Se tiene

$$\begin{aligned}
 X &= x, \\
 Y &= \sqrt{1 - M_\infty^2} y,
 \end{aligned}
 \tag{4-7}$$

$$Z = \sqrt{1 - M_\infty^2} z ,$$

$$\Phi' = \sqrt{1 - M_\infty^2} \phi' .$$

Aplicando el cambio de variable a la ecuación (4-5), se obtiene la siguiente ecuación del tipo Laplace.

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial Z^2} = 0 . \quad (4-8)$$

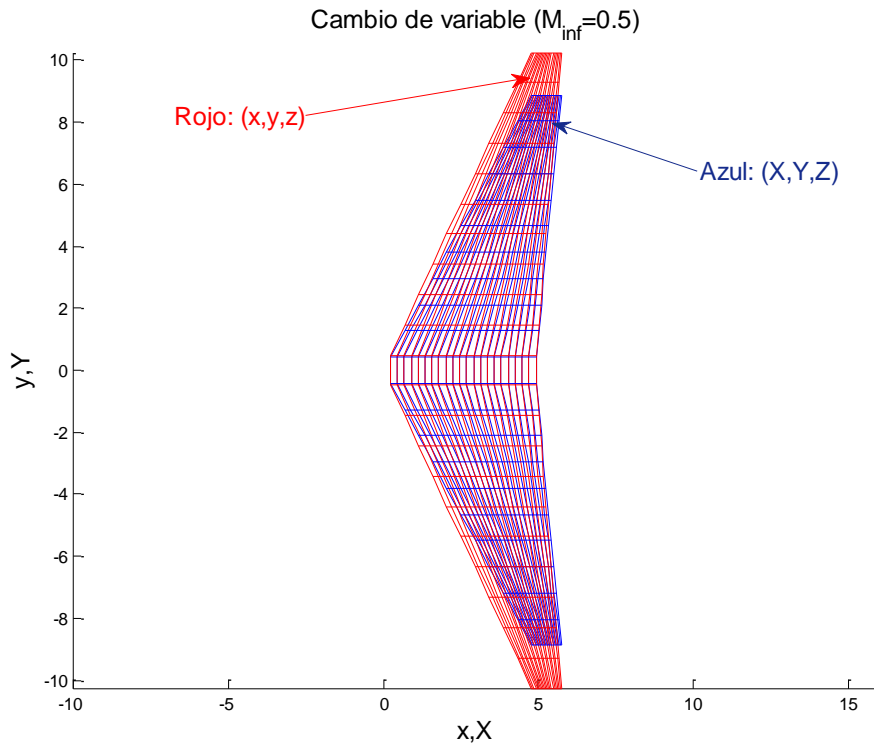


Figura 4-10. Ejemplo del cambio de variable en la geometría para el caso $M_\infty = 0.5$ en un ala en flecha.

Una vez realizado el cambio de variable, se resuelve el problema como si fuese incompresible. Finalmente, se vuelve a las variables originales, pudiendo demostrarse que la sustentación y el coeficiente de sustentación quedan:

$$L = \frac{L^*}{1 - M_\infty^2} ,$$

$$C_L = \frac{C_L^*}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} , \quad (4-9)$$

donde L^* y C_L^* representan la sustentación y el coeficiente de sustentación del problema incompresible que surge tras realizar el cambio de variable.

Comparando los resultados obtenidos de la analogía de Prandtl y Glauert con los del Doublet Point Method (caso no estacionario, $k = 0$), para varios números de Mach, para un ala rectangular de alargamiento $AR = 6$, se comprueba que los resultados son prácticamente idénticos, por lo que se vuelve a confirmar la veracidad del Doublet Point Method.

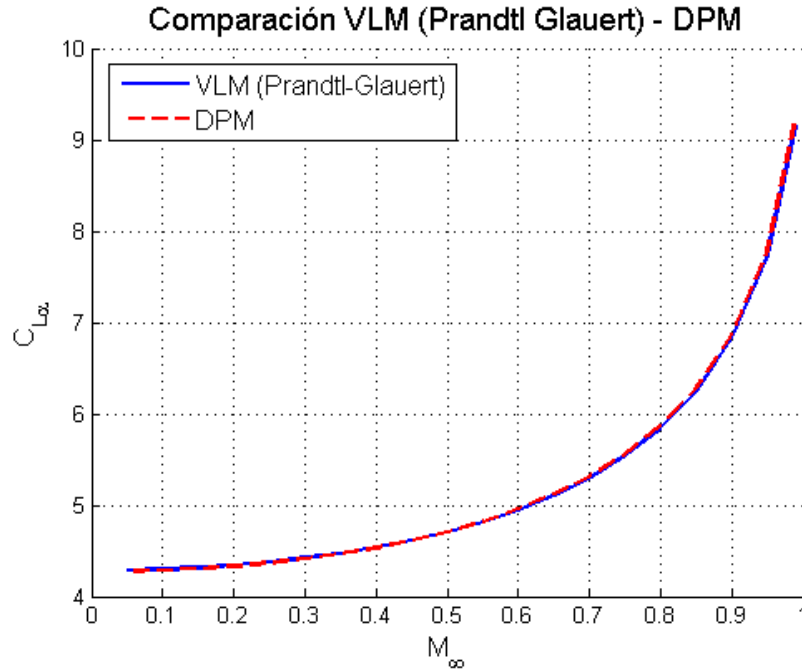


Figura 4-11. Comparación Analogía Prandtl-Glauert con Doublet Point Method (Ala rectangular, $AR = 6$, $N_x = 10$, $N_y = 60$).

4.3. Problemas clásicos de la aeroelasticidad

4.3.1. Problema de Wagner

Uno de los problemas clásicos de la aerodinámica no estacionaria es el problema de Wagner. Consiste en estudiar cómo varía la sustentación ante un cambio súbito del ángulo de ataque. En principio se desarrolló para perfiles 2D, determinando que ante un aumento α repentino, el coeficiente de sustentación aumentaría desde un valor C_{l_0} hasta $C_{l_0} + 2\pi\alpha$. Se toma la hipótesis de que el perfil no se desplaza verticalmente ni gira a pesar de las fuerzas aerodinámicas que aparecen tras el cambio súbito. Destacar que el principal interés del problema radica en el estudio del transitorio existente entre el instante inicial y el final.

Wagner estudió la solución analítica para este problema y obtuvo:

$$C_l(s) = 2\pi\alpha\phi(s), \quad (4-10)$$

donde $s = U_\infty t/c_m$ y $\phi(s)$ es la función de Wagner, que se encuentra desarrollada en [14].

En el presente trabajo, dado que el método está desarrollado para alas finitas, se realizará un estudio para un alargamiento elevado para compararlo con la respuesta de Wagner. Para obtener la respuesta 3D basta con imponer $\bar{z}_a(x, y, s) = -\alpha(s)x$ en la condición de contorno, donde el escalón $\alpha(s)$ se aproxima mediante una tangente hiperbólica de la siguiente manera

$$\alpha(s) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \right] \alpha_s, \quad (4-11)$$

donde α_s es la amplitud del escalón y ε define la rapidez con la que tiende a la asíntota (en lo que sigue 0.01).

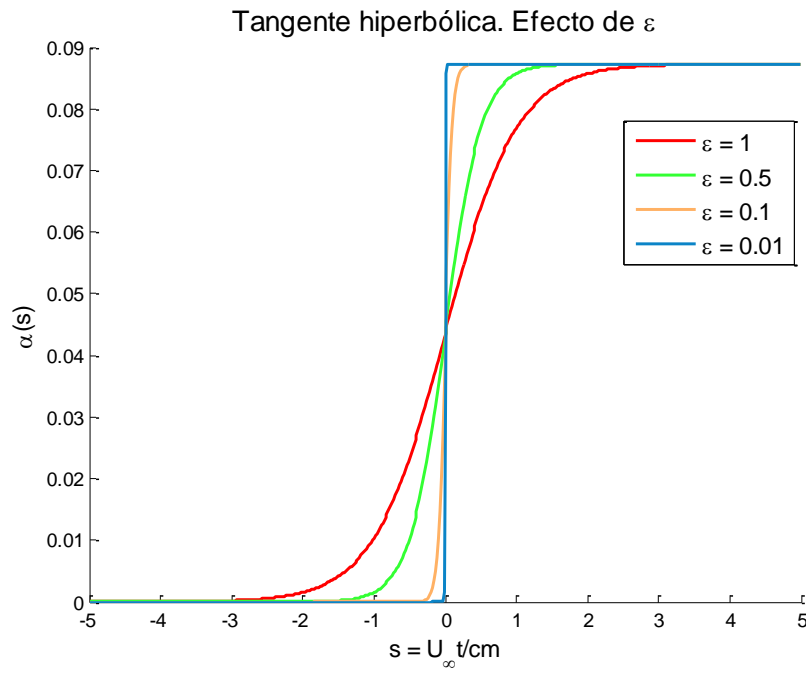


Figura 4-12. Efecto de ε en la tangente hiperbólica (4-11).

Realizando un estudio para $M = 0.01$ y $AR = 30$, se tiene

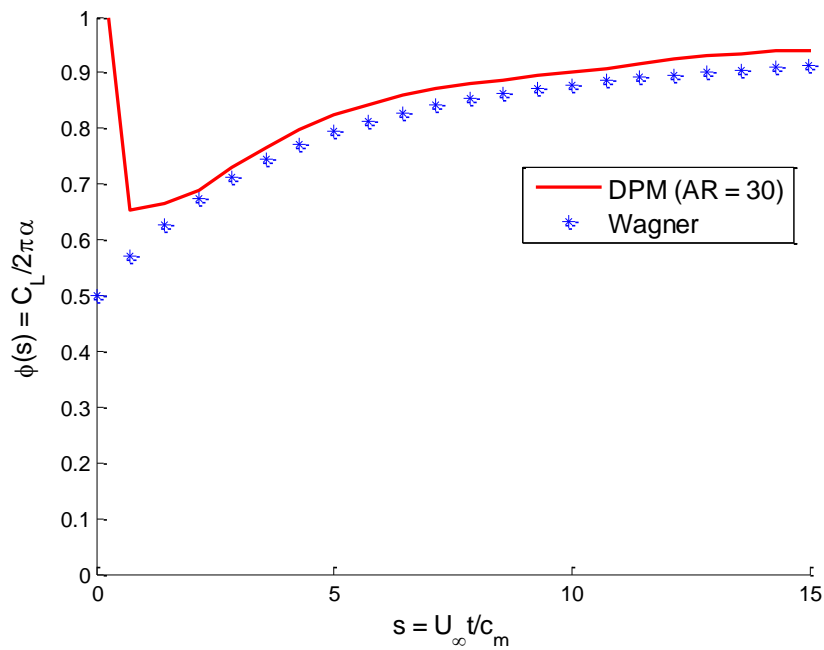


Figura 4-13. Aproximación 2D. Problema de Wagner.

En la figura anterior, se comprueba que, para un alargamiento elevado, el método presenta resultados muy similares a los de Wagner. Es interesante comprobar cómo sería la respuesta si no se aplicasen los factores de Lanczos:

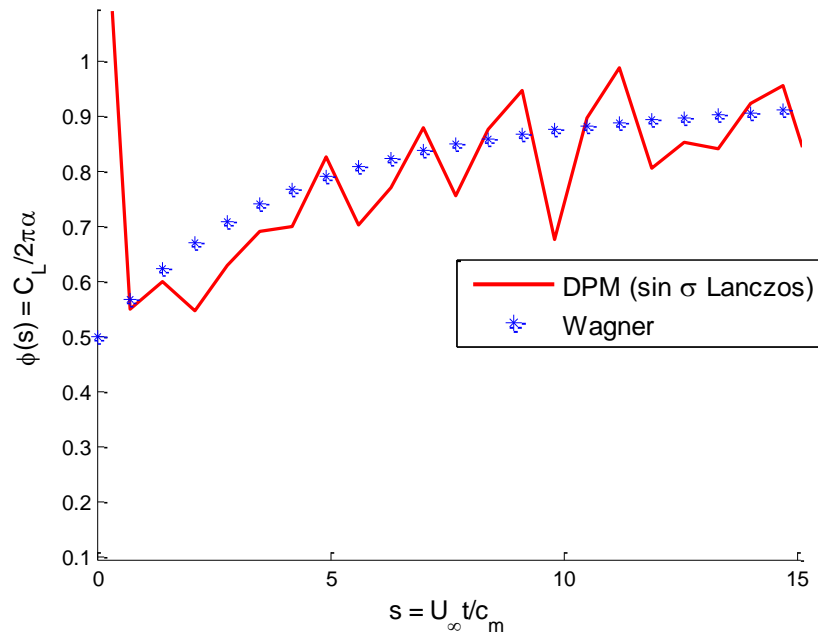


Figura 4-14. Respuesta sin aplicar los factores σ de Lanczos.

Por otro lado, en la referencia [16] se encuentran distintos estudios para alas finitas ante un cambio súbito del ángulo de ataque.

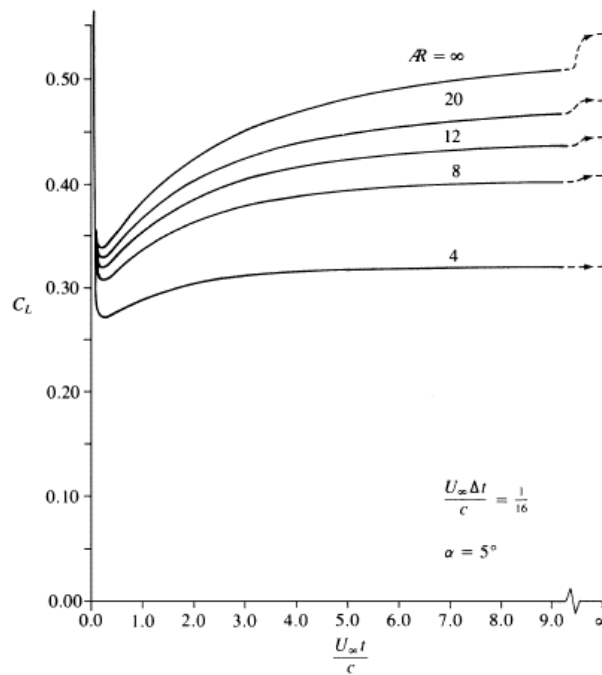


Figura 4-15. Variación del coeficiente de sustentación ante un cambio súbito en el ángulo de ataque para distintos alargamientos. Imagen obtenida de [16].

En primer lugar, realizando un estudio para el caso estacionario ($t \rightarrow \infty$), se comprueba que los resultados obtenidos son prácticamente idénticos a los de la Figura 4-15.

Estacionario $\alpha_s = \frac{5\pi}{180}$	
AR	C_L
200	0.5325
20	0.4748
12	0.4403
8	0.4027
4	0.3192

Tabla 4-2. Coeficiente de sustentación estacionario ante un cambio repentino en el ángulo de ataque.

En cuanto al régimen transitorio, analizando para varios alargamientos, se tiene que la respuesta también es bastante similar. Cabe destacar que tanto al número de puntos para tomar la transformada de Fourier, como el panelado geométrico del ala, afectan de manera notable a los resultados. En particular, el número de puntos de la transformada de Fourier, como se ha comentado en apartados anteriores, es fundamental para conseguir que la respuesta se aproxime. Una manera de disminuir este número sin perder precisión es hacer uso de los factores de Lanczos (apartado 3.2) y del truncamiento (apartado 4) comentados anteriormente. Teniendo en cuenta estos aspectos, se llega a una solución de compromiso en relación precisión – tiempo de ejecución para conseguir buenos resultados (Figura 4-16).

A continuación, se muestran algunos de los resultados más relevantes.

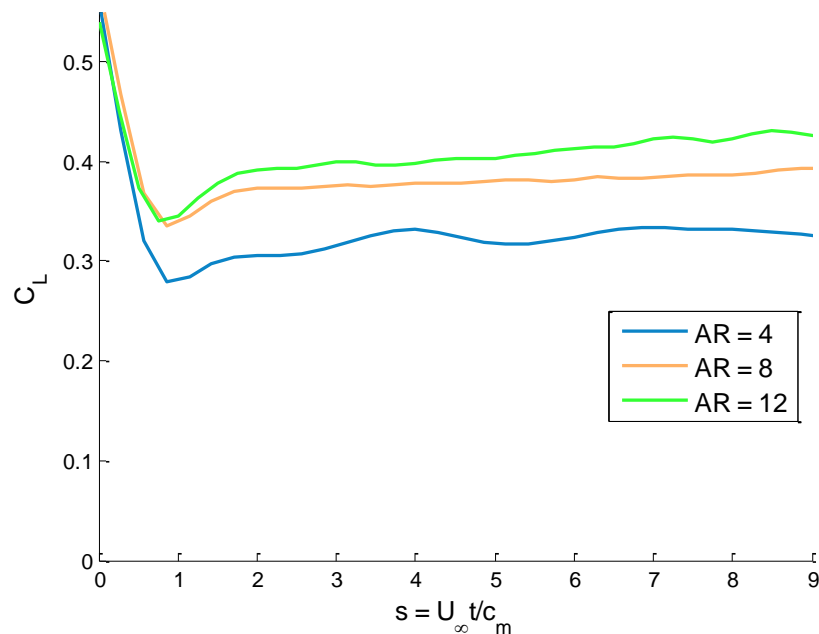


Figura 4-16. Respuesta ante cambio súbito del ángulo de ataque con DPM. Comparación Figura 4-15.

Cabe destacar que el método funciona para diferentes geometrías alares. Por ejemplo, Jones [14] desarrolló unas funciones similares a las de Wagner con las que aproximar la respuesta ante escalón de un ala elíptica.

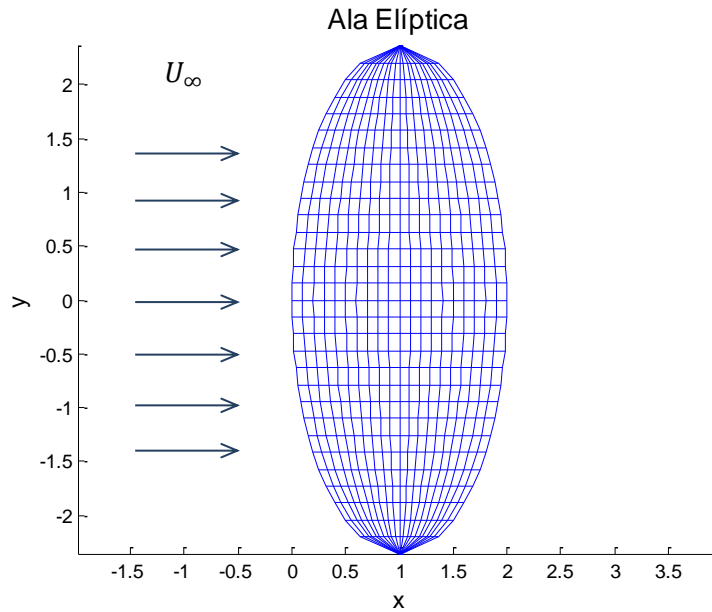


Figura 4-17. Ala elíptica $AR = 3$ (x, y adimensionales).

Analizando este tipo de geometría, se comprueba que los resultados son satisfactorios.

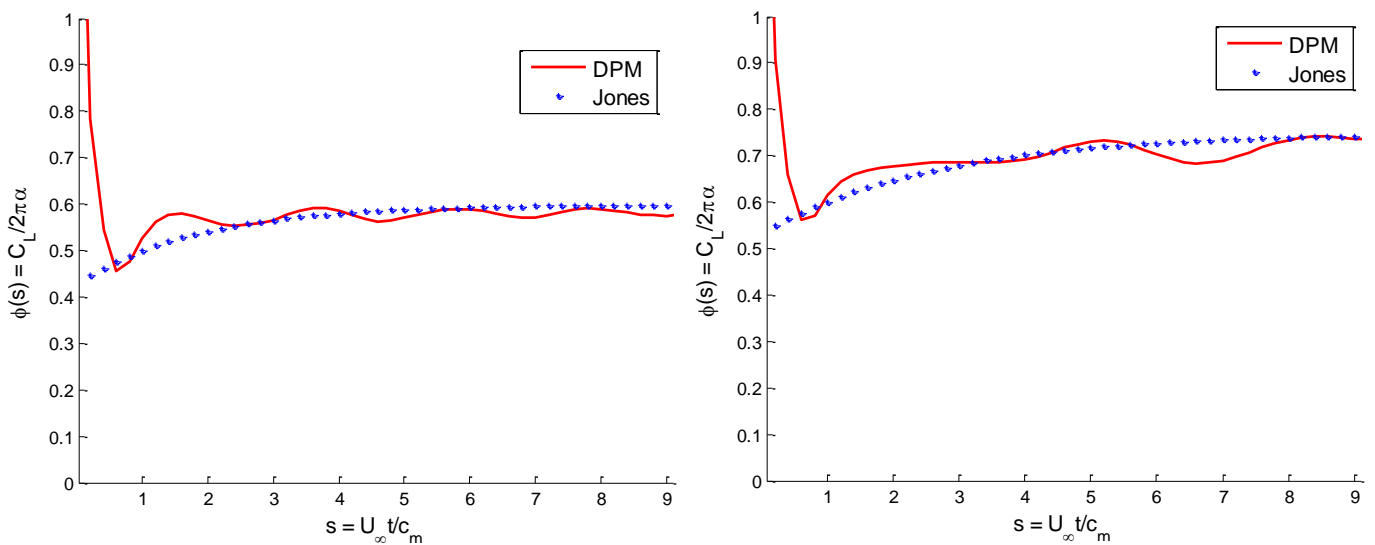


Figura 4-18. Ala elíptica ($AR = 3$ izquierda, $AR = 6$ derecha) ante cambio súbito de ángulo de ataque.

Por otro lado, es bien conocido que el ala elíptica apenas se usa en la realidad por su compleja fabricación (además de otras desventajas, como la difícil recuperación tras entrar en pérdida). Así, surgen geometrías como las alas hexagonales, intentando simular el ala elíptica. Por otro lado, a medida que avanza la historia de la aviación, la velocidad de vuelo se ha visto incrementada. Surgen así las alas en flecha, que permiten volar a mayores velocidades retrasando los efectos del régimen transónico. A continuación, se analizan los efectos de la flecha y el estrechamiento ante un cambio súbito en el ángulo de ataque.

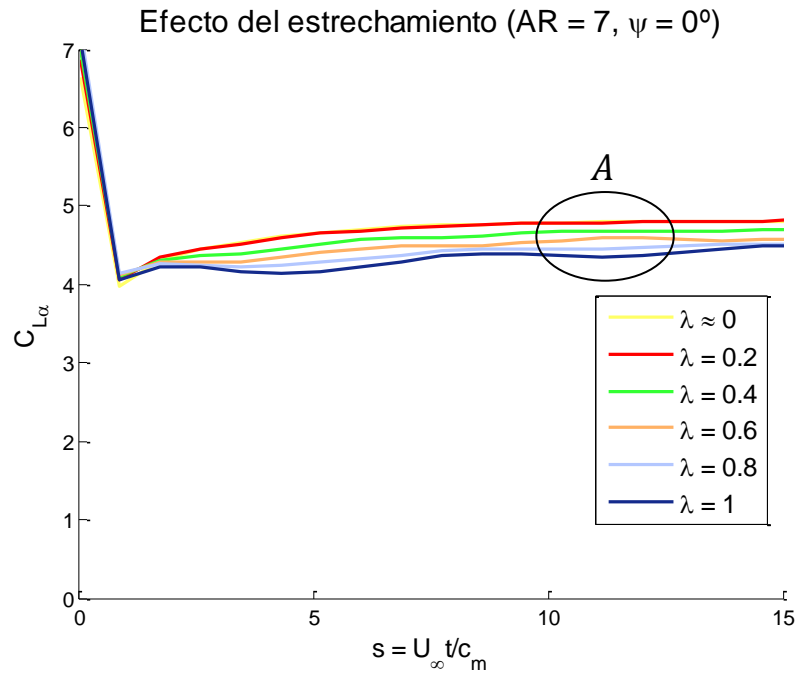


Figura 4-19. Efecto del estrechamiento en el C_{L_α} ante un cambio súbito del ángulo de ataque.

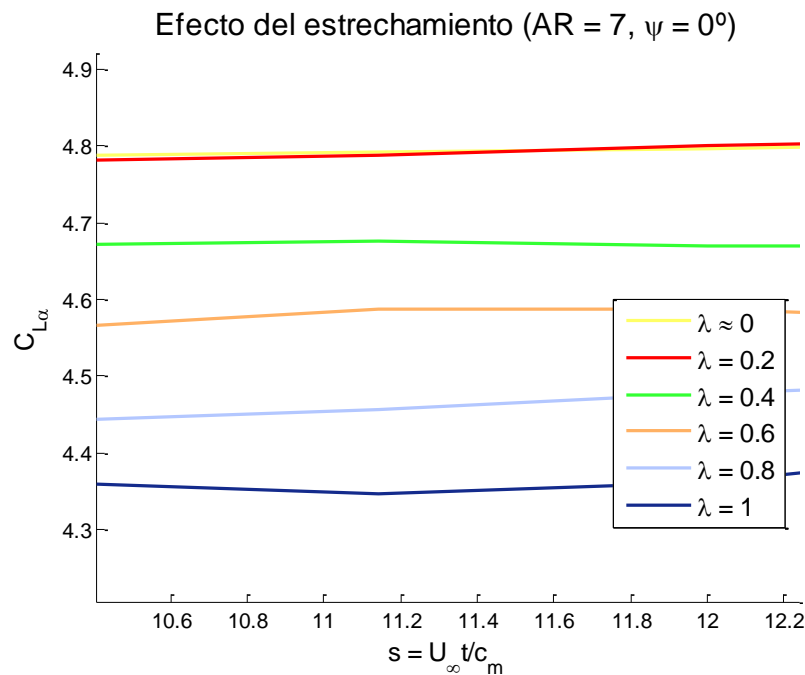


Figura 4-20. Zoom A de la Figura 4-19.

En las figuras anteriores se pueden apreciar varios fenómenos. En primer lugar, se aprecia que el periodo transitorio es muy similar para todos los valores de estrechamiento. Además, al alcanzar el régimen estacionario, existe un valor de estrechamiento (en torno a 0.2) que proporciona el mayor valor de C_{L_α} . Esto se debe a que, como se comentó anteriormente, las alas hexagonales son similares a las elípticas, y existe un valor de estrechamiento para el cual la distribución es más parecida. En la siguiente figura se realiza un estudio análogo para varios valores del ángulo de flecha para el caso “óptimo” de estrechamiento ($\lambda = 0.2$).

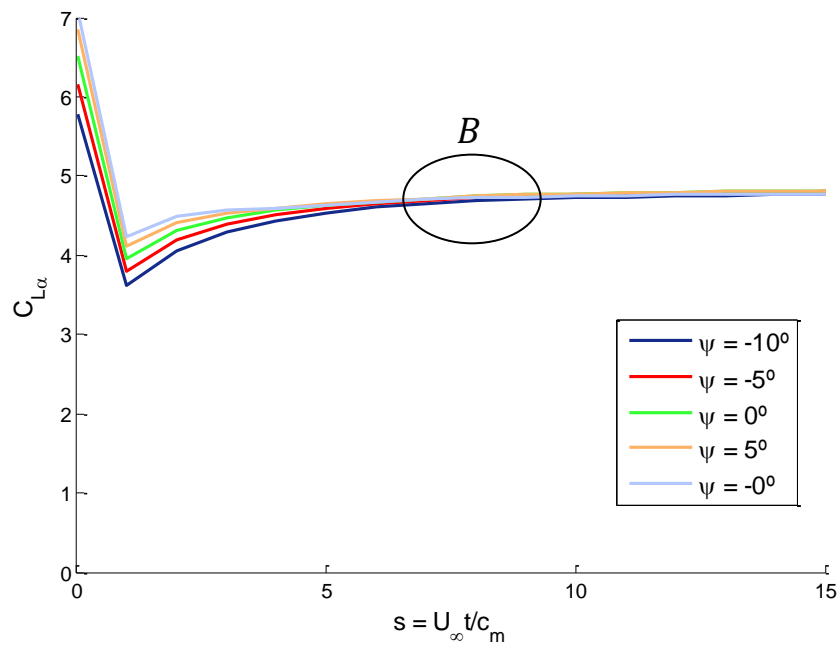


Figura 4-21. Efecto del ángulo de flecha en el $C_{L\alpha}$ ante un cambio súbito del ángulo de ataque.

Como se puede observar, en este caso el periodo transitorio si varía con el ángulo de flecha, produciéndose un pico más acusado cuanto menor es el ángulo ψ . Por otro lado, la disminución en el régimen estacionario es mucho menor que la que se apreciaba al variar el estrechamiento.

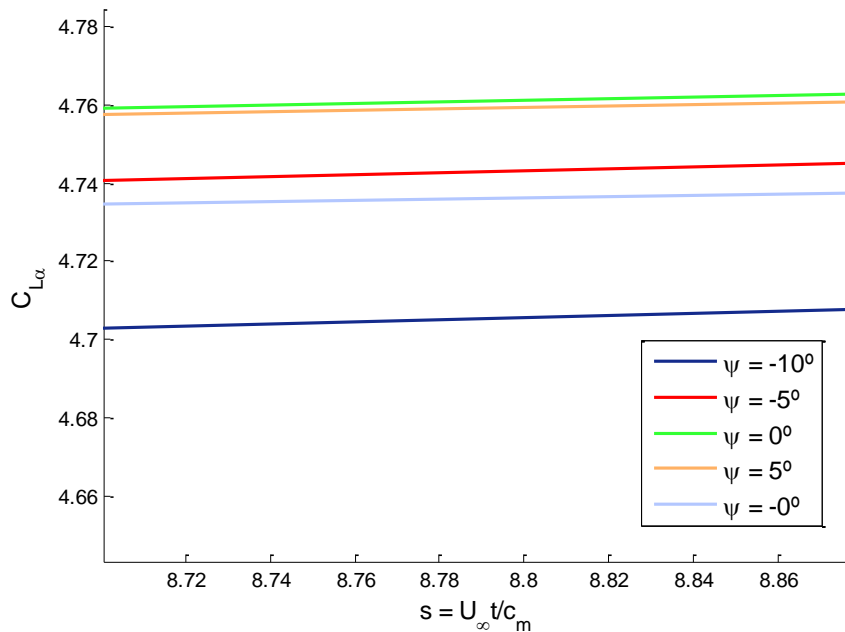


Figura 4-22. Zoom B de la Figura 4-21.

Como se puede apreciar, la flecha nula es la que produce mayor valor de $C_{L\alpha}$. Esto se debe a que la velocidad que ven los perfiles disminuye al incluir flecha, y con ello el coeficiente de sustentación. Esta disminución se compensa con otras ventajas que tiene el ala en flecha, como son mejores comportamientos a velocidades cercanas al régimen transónico (debido a que se pueden alcanzar mayores velocidades), mayor estabilidad a balanceo, y mayor estabilidad a cabeceo [9].

Finalmente, antes de dar paso al siguiente apartado, se analiza la respuesta para el caso compresible. Se realiza el experimento para un ala rectangular de alargamiento elevado (problema 2D) para varios números de Mach.

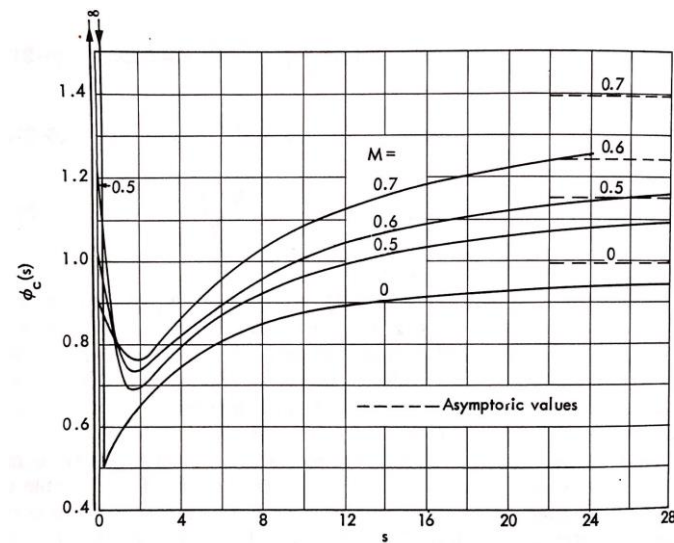


Figura 4-23. Resultados problema 2D caso compresible. Imagen obtenida de [14].

Los resultados se comparan con los mostrados en [14].

Estacionario $AR = 300$	
M	$\phi(s \rightarrow \infty)$
≈ 0	≈ 1
0.5	1.13
0.6	1.22
0.7	1.37

Tabla 4-3. Régimen estacionario. Problema compresible.

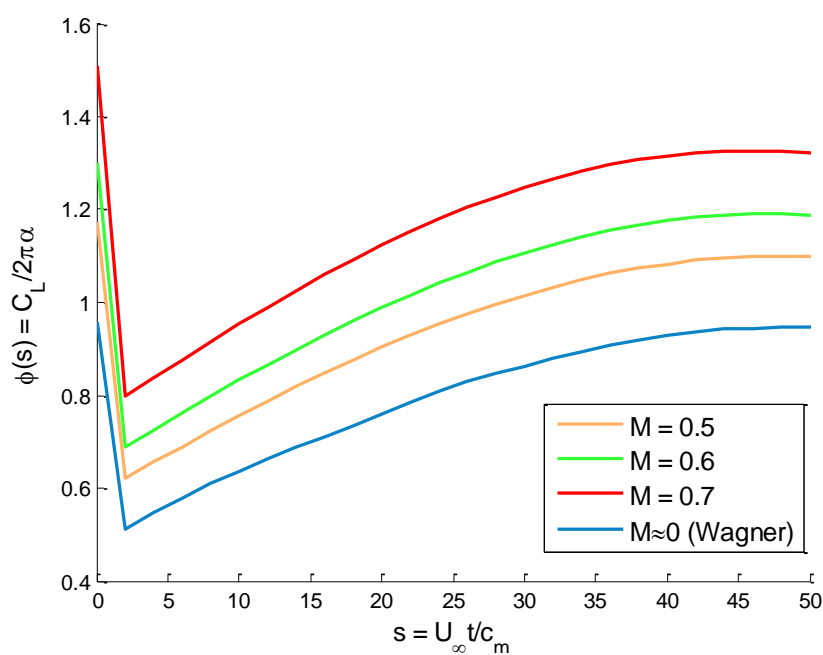


Figura 4-24. Resultados obtenidos con el DPM ($AR = 200, N_p = 400$).

Cabe destacar que, para el caso compresible, no es necesario incluir un número tan elevado de puntos al tomar la transformada de Fourier debido a que la respuesta se amortigua más rápido (por efectos de la compresibilidad).

4.3.2. Problema de Küssner

Otro problema clásico de la aerodinámica no estacionaria es el problema de Küssner. Consiste en estudiar el cambio del coeficiente de sustentación cuando un perfil 2D atraviesa una ráfaga. Como hipótesis principal se supone que el perfil ni se desplaza ni gira.

En particular, se hará uso de una ráfaga uniforme de intensidad w_0 . Para imponer una ráfaga como condición de contorno, será necesario modificar la expresión (2-88) por

$$\bar{w}_I = -\bar{w}_g(x_I, y_I) \quad (4-12)$$

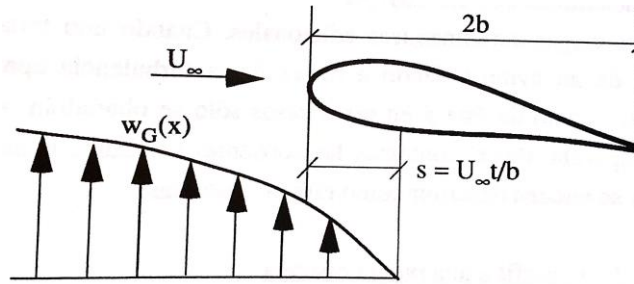
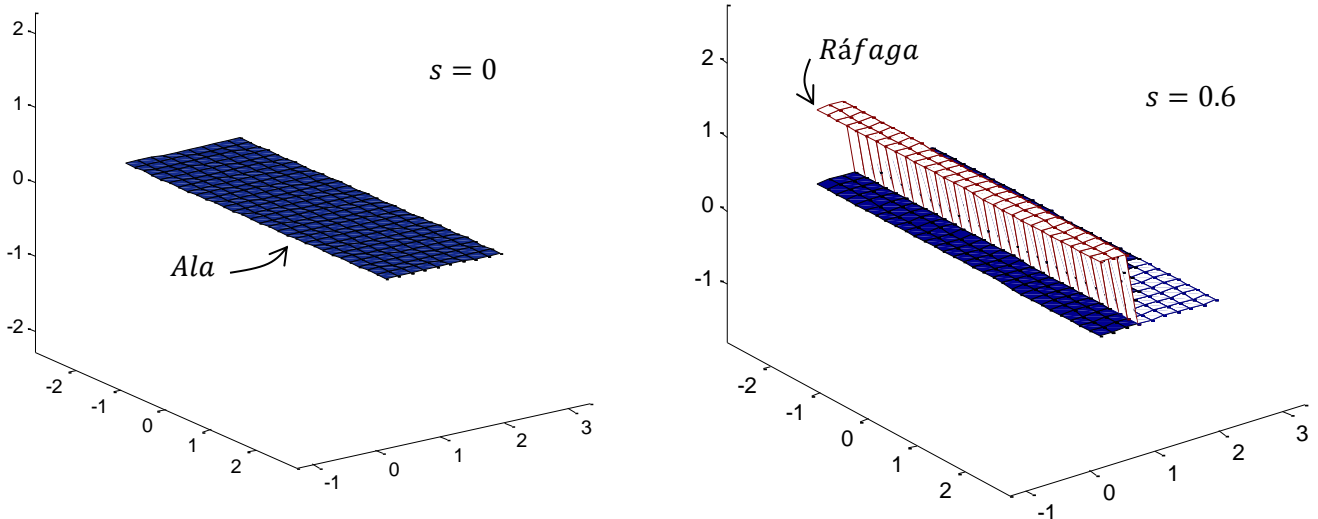


Figura 4-25. Perfil bidimensional atravesando una ráfaga. Imagen obtenida de [10].

dato que \bar{z}_a será igual a cero. \bar{w}_g representa la intensidad de la ráfaga adimensional, la cual será un escalón de amplitud w_0/U_∞ que se desplaza a la velocidad del flujo incidente (véase Figura 4-26). Esto se puede modelar mediante la función de Heaviside de la siguiente manera

$$w_g(t) = w_0 H\left(t - \frac{x}{U_\infty}\right) \quad (4-13)$$

donde $H(\gamma) = 0$ si $\gamma < 0$ y $H(\gamma) = 1$ si $\gamma > 0$. Destacar que, en este caso particular, la entrada depende tanto del tiempo como de la coordenada x . Para trabajar como se ha venido haciendo hasta el momento, será necesario crear una matriz en la cual cada fila represente la evolución temporal de la coordenada x de cada panel. Así, realizando la transformada de Fourier de cada fila (la función `fft` de MATLAB permite directamente abordar este problema sin más que indicar la dirección en la que se realiza la transformación [21]), se obtiene una matriz en la cual cada fila está compuesta por las componentes de Fourier de cada panel, por lo que el programa se ejecutará con normalidad.



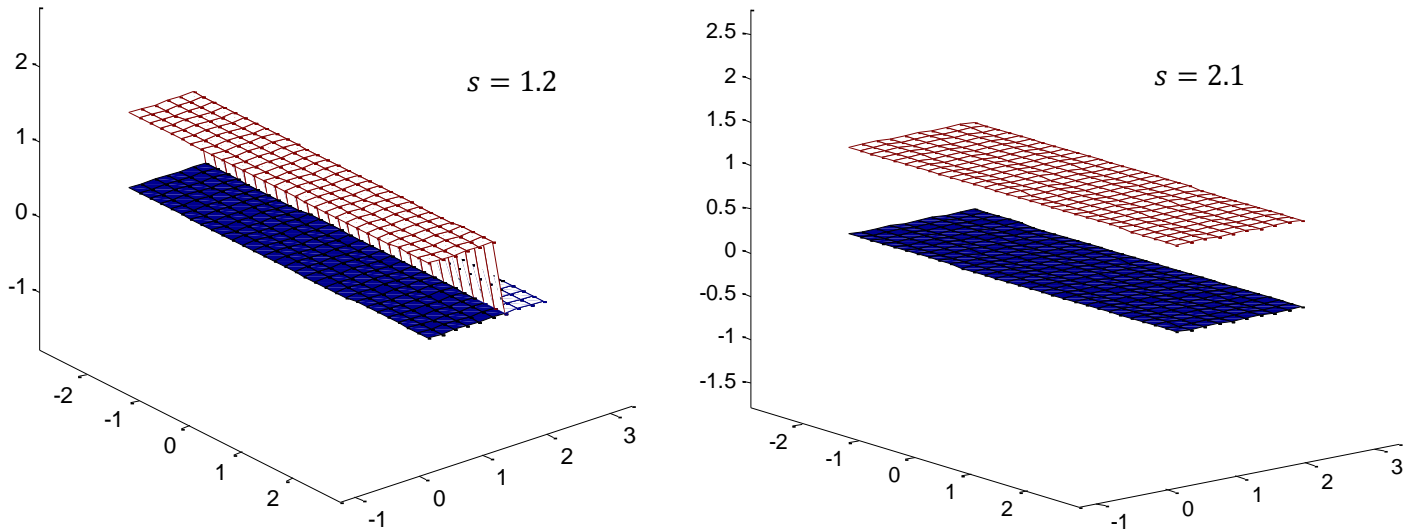


Figura 4-26. Ráfaga de intensidad unidad atravesando el ala.

Küssner desarrolló una función, $\psi(s)$, que representa el cambio en el coeficiente de sustentación del perfil 2D para el caso incompresible, la cual se encuentra explicada en [14].

$$C_l(s) = 2\pi \frac{w_0}{U_\infty} \psi(s). \quad (4-14)$$

Procediendo de la misma manera que se ha hecho hasta ahora, se representa la función de Küssner para un ala de alargamiento elevado (simulando un perfil 2D) volando en régimen incompresible ($M = 0.01$). En la Figura 4-27 se comprueba que los resultados son aceptables.

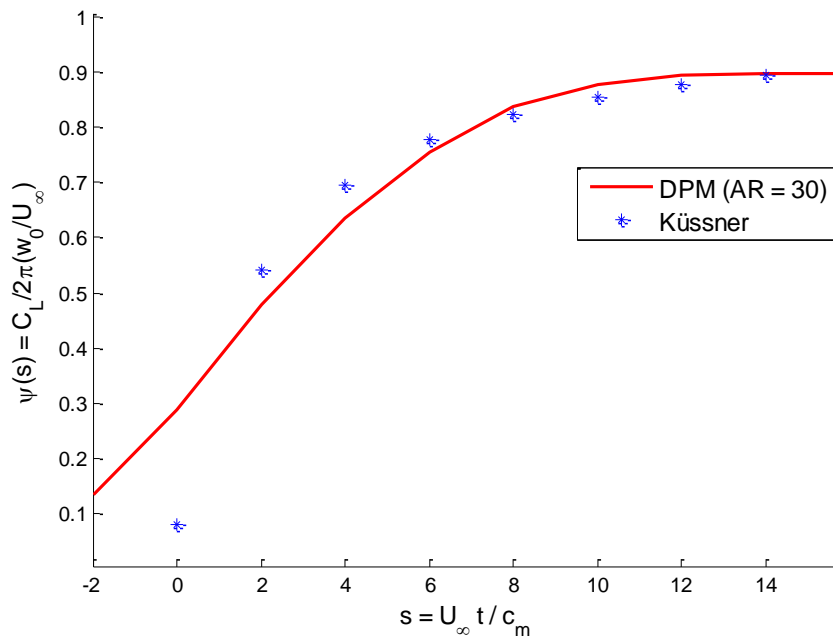


Figura 4-27. Aproximación 2D. Problema de Küssner.

Por otro lado, al igual que con el problema de Wagner, Jones [14] desarrolló unas funciones análogas para el caso del problema de Küssner, con las cuales se puede simular la respuesta de un ala elíptica de alargamientos 3 y 6.

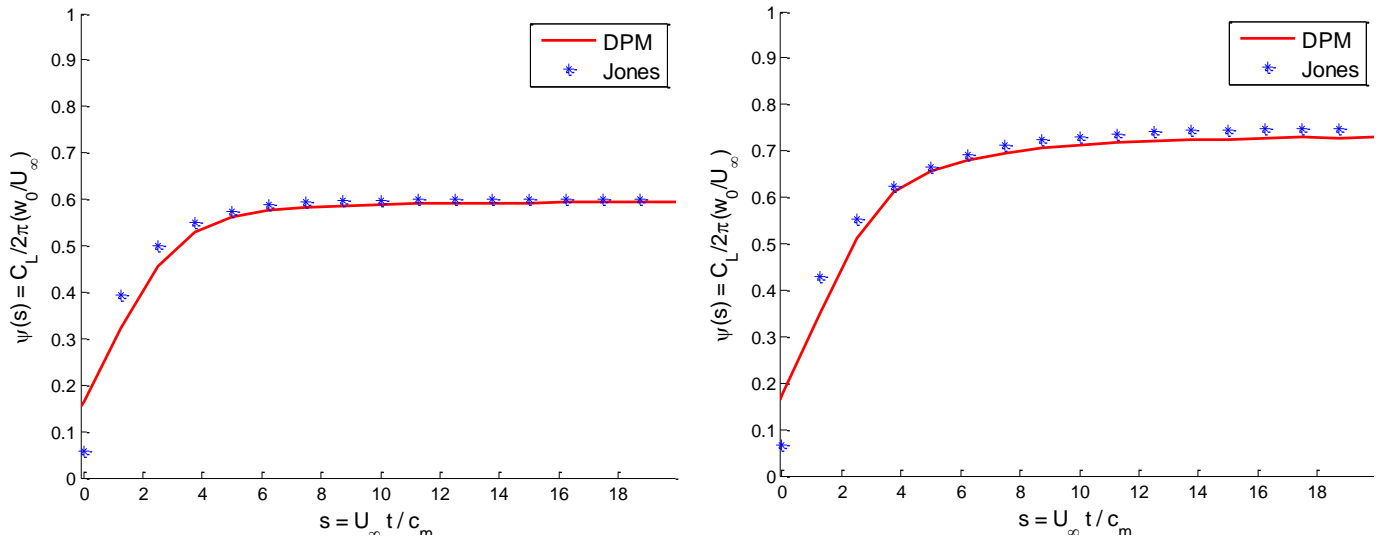


Figura 4-28. Ala elíptica ($AR = 3$ izquierda, $AR = 6$ derecha) atravesando una ráfaga uniforme de intensidad unidad.

Se puede apreciar en las figuras anteriores que los resultados muestran gran similitud con la evolución propuesta por Jones. Cabe destacar que existe cierta discrepancia debido a que, por muy fino que sea el panelado, los puntos de colocación siempre estarán retrasados con respecto al borde de ataque. En la realidad, en el momento en el que el borde de ataque comienza a penetrar la ráfaga se debería experimentar un cambio en el coeficiente de sustentación.

Por otro lado, tal y como se realizó para el problema de Wagner, se analiza el caso compresible. Para ello se comparan los resultados con los expuestos en [14] para un ala de alargamiento elevado (simulando el problema bidimensional).

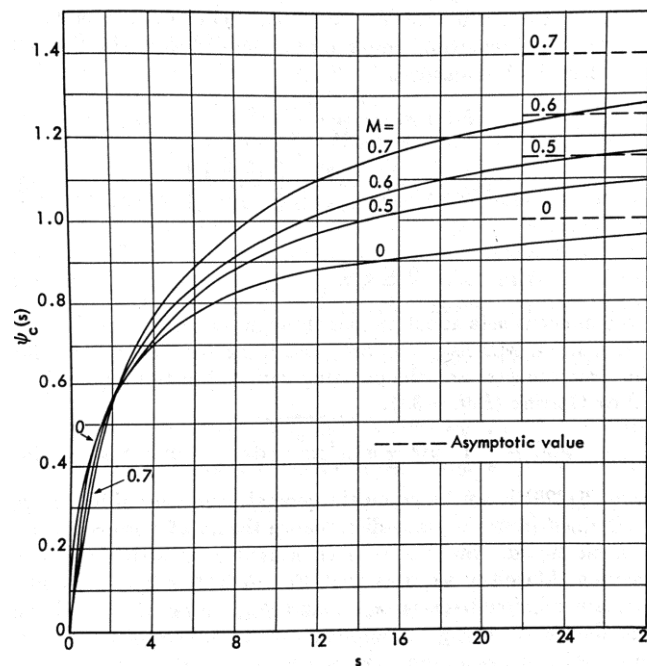


Figura 4-29. Función de Küssner para varios números de Mach. Imagen obtenida de [14].

Como se aprecia en la Figura 4-30, los resultados que se obtienen son similares que los que propone la literatura, aunque se vuelve a producir el problema debido al panelado comentado anteriormente, por el cual los valores iniciales no son nulos. Además, se ha tomado un ala de alargamiento $AR = 30$, y los propuestos en la Figura 4-29 hacen referencia al caso bidimensional. Se propondrá en las líneas futuras de investigación resolver este problema y mejorar así los resultados.

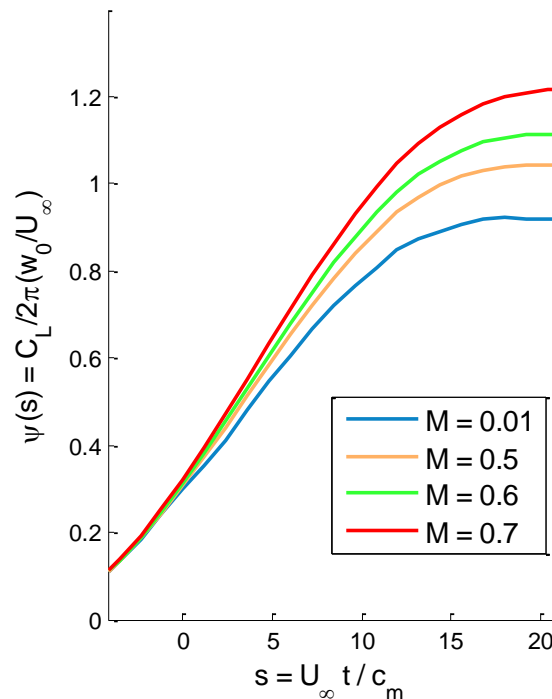


Figura 4-30. Respuesta ante una ráfaga para diferentes números de Mach.

Por último, antes de dar paso al siguiente apartado, es de interés comprobar el efecto de una ráfaga en un ala con flecha en el borde de ataque. A la hora de diseñar una aeronave es de vital importancia tener en cuenta los incrementos de cargas producidos por fenómenos no estacionarios para evitar así el fallo estructural de la misma. Las ráfagas se encuentran entre los fenómenos más comunes, por lo que será un parámetro a tener en cuenta a la hora de diseñar un avión. Es conocido que las alas en flecha presentan un mejor comportamiento ante un fenómeno de este tipo para aeronaves que vuelen a altas velocidades. En efecto, realizando un estudio para varios ángulos de flecha, se comprueba que, a medida que éste aumenta, la respuesta disminuye. Además, esta disminución se ve más acusada si el número de Mach es mayor. Para ello se muestran los resultados para los casos $M_\infty = 0.1$ y $M_\infty = 0.8$ con alas de geometrías idénticas (Figura 4-31). Se puede apreciar que, para mayores velocidades, la diferencia se incrementa. Esto suma a las demás ventajas ya comentadas que presentan las alas en flecha, que las hacen las más comunes en aviones comerciales.

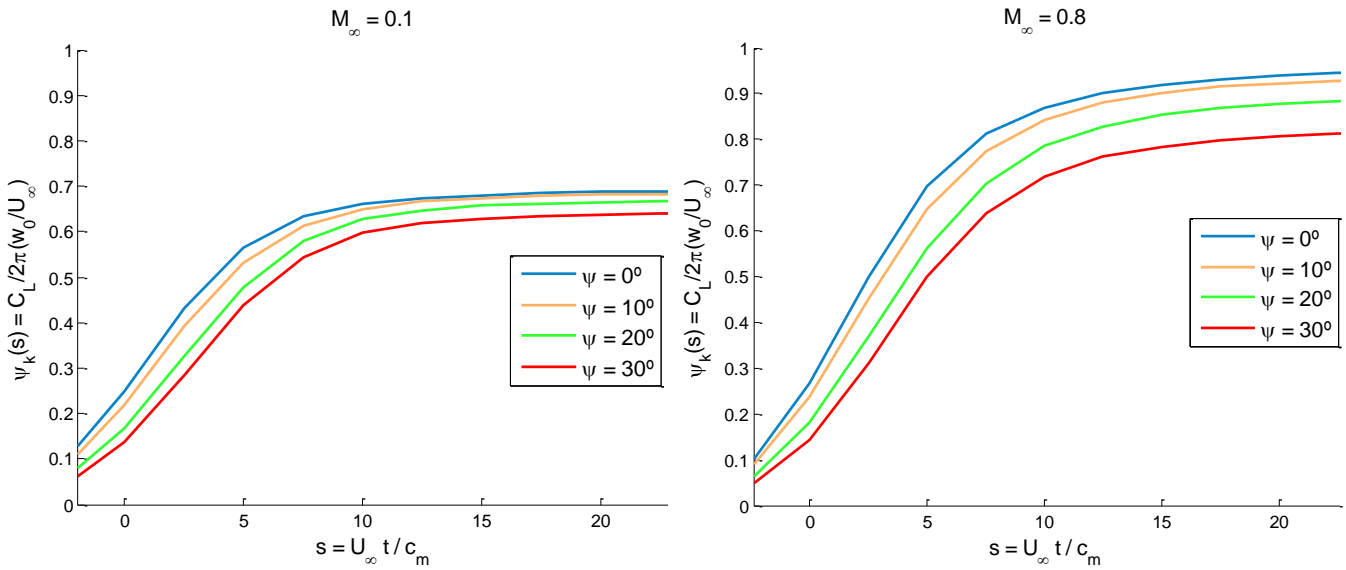


Figura 4-31. Efecto de la flecha ante en la función de Küssner ante una ráfaga de intensidad unidad. A la izquierda caso incompresible, a la derecha caso compresible. Se ha denotado la función de Küssner como ψ_k para diferenciarla del ángulo de flecha, ψ .

4.4. Respuesta ante una entrada cualquiera

Finalmente, ante de cerrar el apartado de Resultados, se analizan algunas entradas que pueden ser de interés. Los resultados expuestos en este apartado hacen referencia a un ala con las siguientes características:

$$AR = 4, \psi = 0^\circ, \lambda = 1, \quad (4-15)$$

volando en régimen incompresible ($M = 0.1$).

Caso 1

En primer lugar, se realiza un análisis suponiendo una entrada con forma de escalón, pero que, en lugar de estabilizarse en torno a un valor final, oscila en torno a un valor estacionario (véase Figura 4-32). Esto es

$$z_a(x, y, s) = -\alpha(s)x, \quad (4-16)$$

con $\alpha(s)$

$$\alpha(s) = \frac{5\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} [1 + \tanh(s - 3)] \cdot \{1 + 0.1 \cos[0.2 \cdot (s - 3)] \cdot H(s - 3)\}, \quad (4-17)$$

donde $H(s)$ es la función de Heaviside descrita anteriormente.

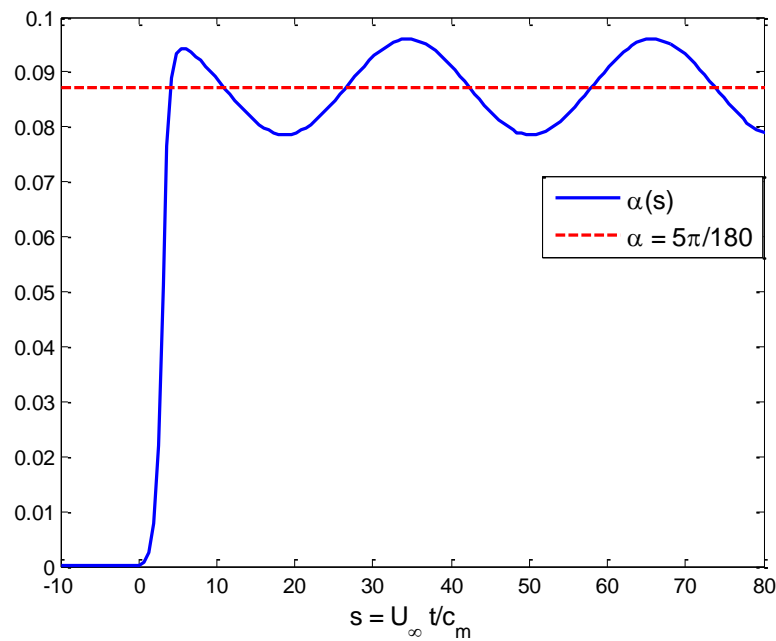


Figura 4-32. Entrada Caso 1.

Las variaciones del coeficiente de sustentación se muestran a continuación

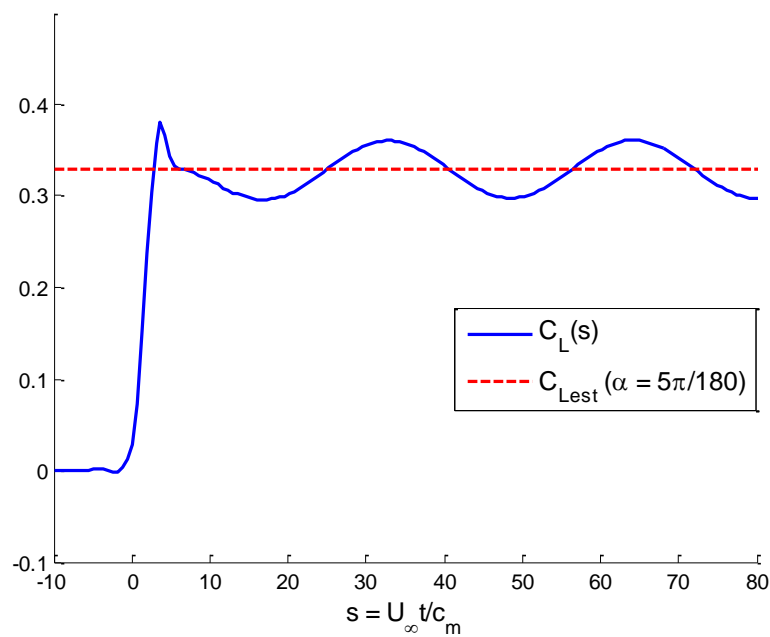


Figura 4-33. Respuesta Caso 1.

Como era de esperar, la respuesta sigue una evolución similar a la entrada, quedando el C_L oscilando en torno a el valor correspondiente para $\alpha = \frac{5\pi}{180}$.

Caso 2

En segundo lugar, se realiza un análisis muy similar al mostrado en el Caso 1 con la diferencia de que, en este

caso, las oscilaciones se amortiguan (véase Figura 4-34).

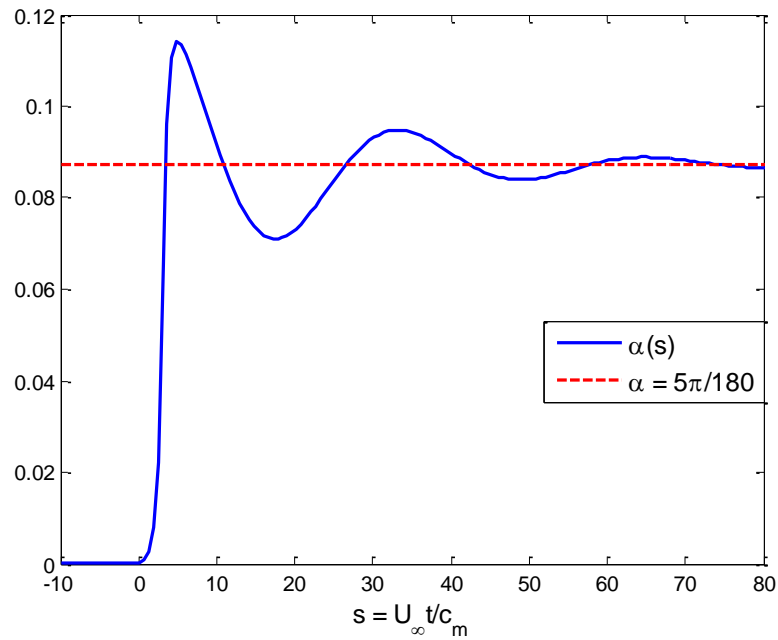


Figura 4-34. Entrada Caso 2.

Con

$$\alpha(s) = \frac{5\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} [1 + \tanh(s - 3)] \cdot \{1 + 0.4 \cos[0.2 \cdot (s - 3)] \exp[-0.05(s - 3)] \cdot H(s - 3)\}. \quad (4-18)$$

Las variaciones del coeficiente de sustentación se muestran a continuación

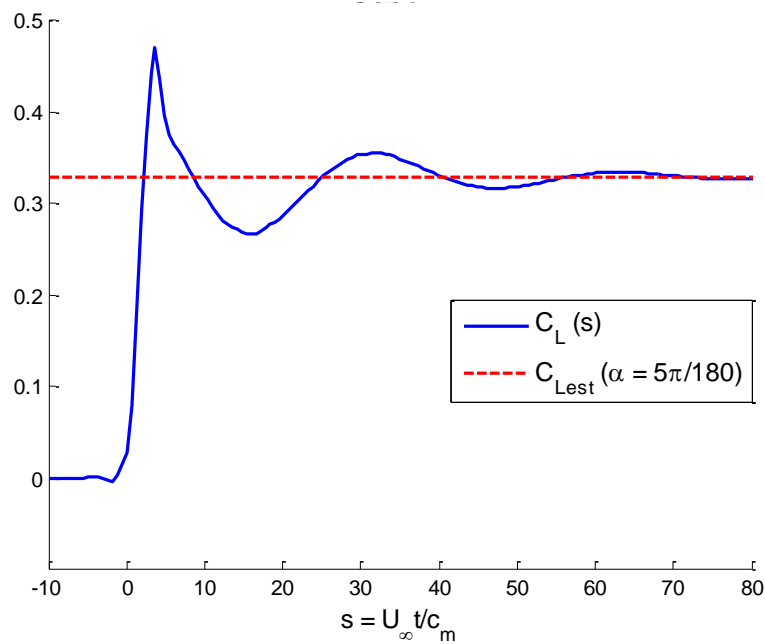


Figura 4-35. Respuesta Caso 2.

En este caso se produce un pico más acusado debido a que el cambio es de mayor amplitud. Se comprueba que,

como era de esperar, tras cierto tiempo el coeficiente de sustentación tiende al valor estacionario.

Caso 3

Por último, se realiza un experimento similar al propuesto al final del apartado 4.1 (heaving motion), en el cual el ala se mueve con frecuencia reducida $k = 0.7$. Cabe destacar que el ala oscila en altura, no en ángulo de ataque (véase (4-3) y (4-4)). A continuación, se muestra en una sola figura la evolución de $h(s)$ y $C_L(s)$ para poder comparar fácilmente el desfase. Además, se representa en línea discontinua el valor proporcionado por Ueda – Dowell sin tener en cuenta la evolución en el tiempo ($|\overline{C_L}|$).

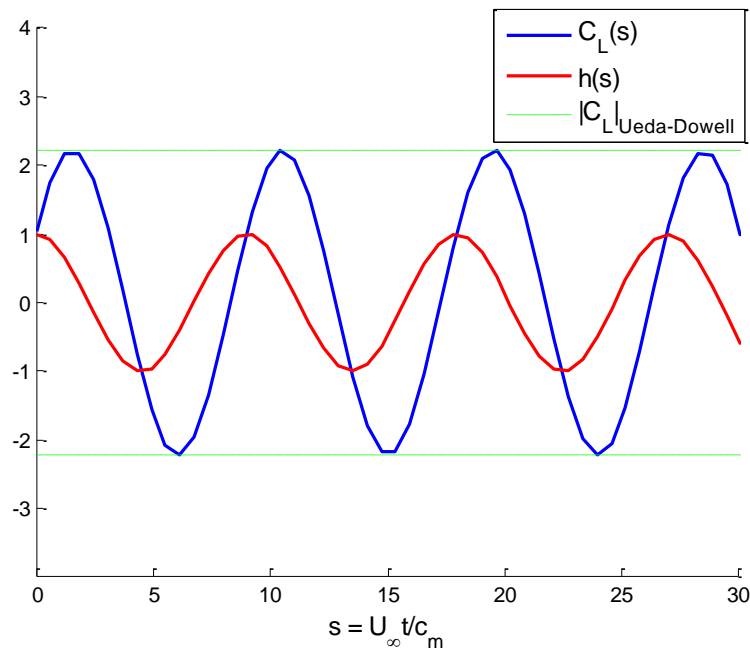


Figura 4-36. Entrada y respuesta Caso 3.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo.

-Marie Curie -

A lo largo del presente trabajo se han expuesto los fundamentos del Doublet Point Method, un método que permite analizar los casos compresible, incompresible, estacionario y no estacionario de cualquier geometría alar en régimen subsónico. Se ha comprobado que puede ser una gran alternativa a los usados comúnmente, entre los que se encuentra el Vortex Lattice Method.

El desarrollo de los fundamentos teóricos pretende facilitar al lector el entendimiento de las ecuaciones que gobiernan el problema. Por lo general, la bibliografía existente es bastante compleja y complicada de seguir, por lo que se ha profundizado en algunos de los pasos más relevantes para que sirva de referencia para futuras investigaciones. Aunque otros métodos, como el Vortex Lattice, ofrecen una visión más intuitiva de la física que gobierna el problema, no consiguen representar el caso compresible con exactitud. Por ejemplo, en [2], se concluye que las herraduras turbillonarias no son capaces, en ocasiones, de reproducir bien el campo de velocidades real. Con la distribución de dobletes empleada en el presente trabajo, esto no sucede. Otra de las ventajas frente al VLM es el no tener que tratar la estela, lo cual facilita los cálculos y el desarrollo.

En cuanto a los resultados obtenidos, comentar que, tanto para el caso compresible como incompresible, ha habido que llegar a una solución de compromiso entre la precisión y el tiempo de computación modificando el panelado y el número de puntos que se toman al realizar la transformada de Fourier. En el caso estacionario esto no ha sido tan relevante (solo se ejecutaba el programa para una frecuencia), sin embargo, para analizar el régimen transitorio del apartado 4.3, si ha sido necesario realizar un ajuste muy preciso para obtener resultados que se aproximen a los de la literatura. Para conseguir reducir el tiempo de duración de los experimentos, manteniendo la precisión de los resultados, se han utilizado los factores de Lanczos, los cuales eliminan con gran rapidez las oscilaciones producidas por la transformada de Fourier.

Este tipo de métodos (Doublet Point Method, Vortex Lattice Method, etc. ...) son de muy de buena utilidad como primera estimación, ya que los tiempos de ejecución son mucho menores que los necesarios para análisis

CFD¹¹. Sin embargo, cuando se requiere alta precisión, éstos suelen ser los más usados.

De este modo, se proponen las siguientes líneas futuras de investigación.

- Mejora de los resultados obtenidos en régimen no estacionario. Para ello se propone realizar un estudio detallado de cómo afectan el panelado y los puntos tomados para realizar la transformada de Fourier. Investigar factores similares a los de Lanczos que permitan disminuir las oscilaciones sin elevar demasiado el tiempo de computación.
- Implementación de las ecuaciones que describen la dinámica del ala, para así poder resolver problemas de interés para la aeroelasticidad, como son el flameo y la divergencia.
- Realizar un estudio comparativo entre los tres métodos comentados a lo largo de este trabajo (Doublet Point Method, Doublet Lattice Method, Vortex Lattice Method) con el fin de recopilar tiempos de ejecución, resultados, etc. Para ello será necesario implementar el DLM y completar el VLM (comenzado en [9]) con el caso compresible.
- Implementar un método similar al propuesto que cubra el régimen supersónico. De manera similar, resolver el problema simétrico (de espesor) propuesto en el apartado 2.1 y acoplarlo con el problema de curvatura.

Finalmente, para agilizar futuros estudios, se adjuntan en el Anexo D. Códigos MATLAB las principales líneas de código necesarias para la implementación del Doublet Point Method.

¹¹ Dinámica de Fluidos Computacional

ANEXO A. TRANSFORMADA DE FOURIER

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos.

- Jean-Baptiste Joseph Fourier -

En el presente anexo se abordará una de las herramientas matemáticas más utilizadas en el ámbito ingenieril, en concreto en el mundo del procesamiento matemático de señales, la Transformada de Fourier. Además del problema de la recuperación de señales a partir de cierta información discreta, hay otros aspectos que conllevan el uso de esta herramienta matemática, como la comprensión de la información, la restauración de imágenes, la detección de bordes y sombras, etc.

Definición. Una señal es una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio, o cualquier otra variable o variables independientes. Es decir, una señal no es más que una función $x: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; t \rightarrow x(t)$, de una o varias variables.

Las series de Fourier son útiles para el estudio de señales periódicas, pero, desafortunadamente, este tipo de señales no son tan frecuentes en la práctica como las no periódicas. Esta situación requiere el desarrollo de una teoría matemática más ambiciosa.

Sea $x(t)$ una señal no periódica definida en todo el intervalo real, y denotemos $x_T(t)$ ($T > 0$) la señal de periodo $2T$ que se obtiene a partir de $x(t)$ haciendo $x_T(t) = x(t)$ para $t \in (-T, T]$ y extendiendo periódicamente con periodo $2T$. Si se supone que $x(t)$ es suficientemente suave (por ejemplo, $C^1(\mathbb{R})$), entonces se tendrá la identidad

$$x(t) = x_T(t) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-(\pi i/T)kt} dt \right] e^{(\pi i/T)kt}, \text{ para } t \in (-T, T]. \quad (\text{A-1})$$

Evidentemente, haciendo $T \rightarrow \infty$ en el segundo miembro de la igualdad anterior, entonces la igualdad límite será válida para todo $t \in \mathbb{R}$ y su valor será igual al de la señal de partida $x(t)$.

Tomando $\Delta f = \frac{1}{2T}$ y $f_k = k\Delta f$, la ecuación (A-1) se puede reescribir como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta f \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi i f_k t} dt \right] e^{2\pi i f_k t}, \text{ para } t \in (-T, T]. \quad (\text{A-2})$$

Ahora bien, $|f_{k+1} - f_k| = \Delta f = 1/2T$, con $k \in \mathbb{Z}$ y, por tanto, se pueden interpretar los puntos (f_k) como los nodos equiespaciados de una partición de Riemman para la integral límite siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right) e^{2\pi i f t} df. \quad (\text{A-3})$$

Es decir, se puede concluir que (bajo ciertas condiciones restrictivas sobre la suavidad de la señal no periódica $x(t)$) se satisface la siguiente identidad, llamada Teorema integral de Fourier,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right) e^{2\pi i f t} df. \quad (\text{A-4})$$

Realizando el cambio de variable $\omega = 2\pi f$, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A-5})$$

La integral

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A-6})$$

se denomina **transformada de Fourier** de la señal (no periódica) $x(t)$.

De la misma manera, redefiniendo en sentido inverso, se denomina **transformada de Fourier inversa** de la señal (no periódica) $X(\omega)$ a la integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A-7})$$

Así, bajo ciertas hipótesis (especificadas en [12]), conocer la transformada de Fourier de una señal equivale a conocer dicha señal, ya que al aplicar la transformada inversa se recupera toda la información. De igual forma, si se conocen los coeficientes de Fourier $\{c_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$ de cierta señal (periódica) $x(t)$, de la que se sabe que es suficientemente suave, entonces se conoce la señal, pues para rescatarla completamente bastaría con sumar la correspondiente serie de Fourier. Así, el papel del espectro de la señal, que en el caso periódico lo juegan los coeficientes de Fourier, en el caso no periódico lo juega la transformada de Fourier.

Además, para evitar problemas con la definición de la transformada de Fourier, se supone que la señal $x(t)$ es absolutamente integrable en el dominio real. En ese caso, su transformada existe y está uniformemente acotada en \mathbb{R} .

La palabra “transformada” indica que se está trabajando con una herramienta para transformar un tipo determinado de problema en otro. De hecho, la transformada de Fourier será útil para simplificar el estudio de la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales, convirtiendo el problema de la solución de una ecuación diferencial en un problema de solución de ecuaciones algebraicas. La motivación para dicho estudio está en el hecho de que la transformada de Fourier posee buenas propiedades algebraicas cuando se aplica a las derivadas sucesivas de una señal, o al trasladar la señal, etc. [12].

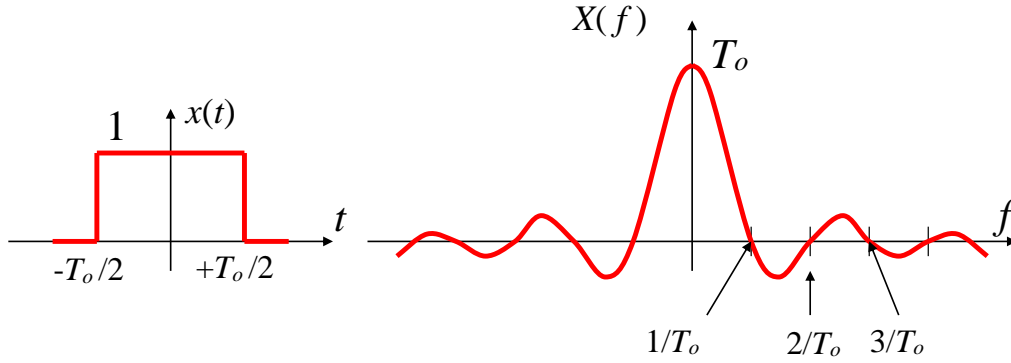


Figura A-1. Ejemplo de la transformada de Fourier de un pulso rectangular

DFT y FFT

La mayoría de las señales no son otra cosa que sucesiones de números reales o complejos. Aunque en principio es posible pensar en señales discretas infinitas (por ejemplo, la señal que resulta de tomar muestras de una señal analógica para valores $t = kT, k \in \mathbb{Z}$), en la práctica todas las señales con las que se trabaja en aplicaciones empiezan y terminan en un tiempo finito y, por tanto, para el estudio de señales digitales (discretas) se podrá suponer sin problemas que éstas son sucesiones finitas de números.

En consecuencia, sea $x = \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ una señal discreta de N puntos. La señal se puede reescribir en la forma

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad (\text{A-8})$$

donde

$$\bar{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} \quad (\text{A-9})$$

denota la **transformada de Fourier discreta (DFT)** de la señal $x = \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$

Para una señal x de N puntos, el cálculo de la DFT de la señal requiere N^2 multiplicaciones y sumas de números complejos. Esto supone un elevado esfuerzo computacional. Por ello, ha habido un enorme interés en el desarrollo de algoritmos para el cálculo eficiente de la DFT. Dichos algoritmos reciben el nombre genérico de **transformadas de Fourier rápidas (FFT)**. A continuación, se explica la idea básica subyacente.

Supuesto N par, entonces se puede reordenar la suma

$$\bar{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-2\pi i m n}{N}} \quad (0 \leq k < N) \quad (\text{A-10})$$

de la siguiente forma: si $m = 2k$ es par, agrupando los términos n y $n + N/2$, se obtiene

$$x(n) e^{\frac{-2\pi i 2k n}{N}} + x\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{\frac{-2\pi i 2k \left(n + \frac{N}{2}\right)}{N}} = x(n) e^{\frac{-2\pi i k n}{N/2}} + x\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{\frac{-2\pi i k \left(n + \frac{N}{2}\right)}{N/2}}, \quad (\text{A-11})$$

de modo que

$$\bar{x}(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}. \quad (\text{A-12})$$

Agrupando nuevamente los términos n y $n + N/2$, se obtiene que

$$\bar{x}(2k + 1) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}}. \quad (\text{A-13})$$

Se sigue, pues, que las componentes frecuenciales de índice par, $\bar{x}(2k)$, se pueden obtener mediante el cálculo de la DFT de la señal $N/2$ periódica

$$x_e(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (\text{A-14})$$

y las componentes frecuenciales de índice impar, $\bar{x}(2k + 1)$, se obtienen calculando la DFT de la señal $N/2$ periódica

$$x_o(n) = e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right]. \quad (\text{A-15})$$

De esta forma, si N es par, entonces el cálculo de su DFT tiene el coste del cálculo de dos DFT's de tamaño $N/2$ más $O(N)$ sumas y multiplicaciones (para el cálculo de las nuevas señales x_e, x_o). Por supuesto, este proceso se puede reiterar tantas veces como sea posible, siendo el caso óptimo aquel en el que $N = 2^M$ para cierto entero $M > 0$.

ANEXO B. FÓRMULA DE GREEN

Las matemáticas son el alfabeto en el que Dios ha escrito el Universo.

-Galileo Galilei -

Desde finales de la década de los sesenta, los métodos numéricos se han convertido en herramientas clásicas para la resolución de problemas ingenieriles. Algunos de estos métodos están basados en la fórmula integral de Green, que permite conocer los valores de una función armónica en el interior de un dominio en función de los valores de esa función en la frontera del dominio. El Método de los Paneles es un ejemplo clásico en el ámbito de la Ingeniería Aeronáutica.

El objetivo del presente apartado es obtener la solución de la Ecuación de Helmholtz mediante el uso de la Fórmula de Green. Para ello, se comenzará por un caso más sencillo, la Ecuación de Laplace.

Ecuación de Laplace

Considérense dos funciones armónicas Φ y Ψ definidas en un dominio simplemente conexo V y cuya frontera S es continua a trozos. Se supondrá que las funciones Φ y Ψ así como sus derivadas hasta el segundo orden son continuas y están acotadas en V .

Si \mathbf{n} es la normal exterior a la superficie S , entonces las funciones Φ y Ψ satisfacen la relación siguiente, denominada fórmula de Green,

$$\int_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (\text{B-1})$$

En efecto, en virtud del teorema de Gauss se puede escribir

$$\int_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) dV = \int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV, \quad (\text{B-2})$$

y como Φ y Ψ son funciones armónicas, y satisfacen por tanto la ecuación de Laplace, el integrando de la integral de volumen en (B-2) es idénticamente nulo y se satisface la relación (B-1).

En la aplicación de la fórmula (B-1) a la resolución de flujos potenciales alrededor de obstáculos, la función Φ representa el potencial de velocidades de perturbación y como función Ψ se escoge usualmente la solución fuente $\Psi = 1/r$; $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, representa una fuente localizada en el punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$. Nótese que, puesto que la función Ψ se hace singular en el punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, este punto debe ser excluido del dominio de integración D si se quiere aplicar la expresión (B-1). La fórmula de Green se aplicará entonces al dominio de la Figura B-1, limitado por la frontera Σ del obstáculo y su posible estela E^{12} , la superficie esférica Σ_ϵ con centro en \mathbf{x} y radio ϵ pequeño y que se hará tender a cero, y otra superficie esférica Σ_∞ con centro en el origen y radio R que se hará tender a infinito.

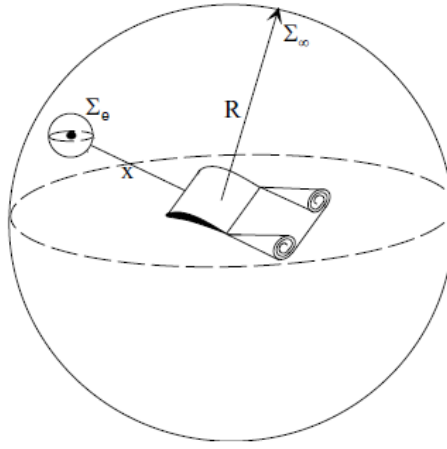


Figura B-1. Dominio de integración. [13]

Aplicado a este dominio la expresión (B-2), y dado que $\nabla_0^2 \Phi = 0$, resulta

$$\int_V \Phi(\mathbf{x}_0) \nabla_0^2 \Psi dV = \Phi(\mathbf{x}) \int_{V_\epsilon} \nabla_0 \cdot \nabla_0 \Psi dV = \Phi(\mathbf{x}) \int_{\Sigma_\epsilon} \nabla_0 \Psi \cdot \mathbf{n}_\epsilon d\Sigma_\epsilon, \quad (\text{B-3})$$

donde \mathbf{x}_0 representa un punto genérico (variable de integración) sobre las superficies de integración. Se ha tenido en cuenta que el punto \mathbf{x} y cualquier punto genérico \mathbf{x}_0 sobre Σ_ϵ están tan próximos que $\Phi(\mathbf{x}_0) = \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \Phi \cdot \mathbf{r} + \dots \approx \Phi(\mathbf{x}) + 0(\epsilon)$.

La integral extendida a la superficie esférica Σ_ϵ de radio ϵ se evalúa fácilmente si se tiene en cuenta que sobre ella $\nabla_0 (1/r) \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})/r^3 = 1/r^2 = 1/\epsilon^2$ y; se tiene, por tanto,

$$\Phi(\mathbf{x}) \int_{\Sigma_\epsilon} \nabla_0 \Psi \cdot \mathbf{n}_\epsilon d\Sigma_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi(\mathbf{x})}{\epsilon^2} \right) 4\pi\epsilon^2 \approx 4\pi\Phi(\mathbf{x}). \quad (\text{B-4})$$

Si en lugar de tomar $\Psi = 1/r$ se hubiese tomado $\Psi = 1/4\pi r$, es fácil comprobar que el resultado sería

¹² En los cuerpos tridimensionales sustentadores aparece una estela de torbellinos detrás del obstáculo cuyo espesor es tan pequeño que puede tratarse como una superficie matemática. A través de ella la función Φ experimenta un salto que está relacionado con el valor de la intensidad de los torbellinos de la estela. Si el obstáculo es no sustentador o el flujo es bidimensional, no existe estela de torbellinos.

$$\int_V (\Phi \nabla_0^2 \Psi - \Psi \nabla_0^2 \Phi) dV = \Phi(\mathbf{x}), \quad (\text{B-5})$$

es decir, para el caso $\nabla_0^2 \Phi = 0$, la función $\nabla_0^2 \Psi$ hace el papel de la función Delta de Dirac $\nabla_0^2 \Psi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ [13].

Ecuación de Helmholtz

De manera análoga, sea Φ una función que verifica la Ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$, y Ψ otra función de la forma $\Psi = -\frac{e^{-ikr}}{r}$, donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, siendo \mathbf{x}_0 la variable de integración. Se tiene entonces

$$\nabla_0 \Psi = -\nabla_0 \left(\frac{1}{r} \right) e^{-ikr} - \frac{ik}{r} e^{-ikr} \nabla_0(r) = -\nabla_0 \left(\frac{1}{r} \right) e^{-ikr} + ik \Psi \nabla_0(r), \quad (\text{B-6})$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla_0 \Psi = - \left[\nabla_0^2 \left(\frac{1}{r} \right) e^{-ikr} - ik e^{-ikr} \nabla_0(r) \cdot \nabla_0 \left(\frac{1}{r} \right) \right] + ik \nabla_0(\Psi) \cdot \nabla_0(r) - ik \Psi \nabla_0^2(r). \quad (\text{B-7})$$

Teniendo en cuenta que $(\nabla_0 r)^2 = 1$, $\nabla_0(r) \cdot \nabla_0 \left(\frac{1}{r} \right) = -1/r^2$, $\nabla_0^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ y $\nabla_0^2(r) = \frac{2}{r}$, y combinando las dos expresiones anteriores, se tiene

$$\nabla_0^2 \Psi = -ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} - ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} - k^2 \Psi - ik \Psi \frac{2}{r} = -k^2 \Psi. \quad (\text{B-8})$$

Reescribiendo el último término de la ecuación (B-2), expresando $\nabla^2 \Phi = -k^2 \Phi$, se obtiene

$$\int_V (\Phi \nabla_0^2 \Psi - \Psi \nabla_0^2 \Phi) dV = \int_V (\Phi \nabla_0^2 \Psi + k^2 \Psi \Phi) dV = \int_V \Phi (\nabla_0^2 \Psi + k^2 \Psi) dV. \quad (\text{B-9})$$

Realizando un razonamiento análogo al expuesto para el caso de la Ecuación de Laplace, dado que el integrando se anula para todo el dominio salvo para los puntos en los cuales la función $\Psi(\mathbf{x}_0)$ es singular, es decir para $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, se puede determinar que el término $\nabla_0^2 \Psi + k^2 \Psi$ actúa como una función Delta de Dirac, $\nabla_0^2 \Psi + k^2 \Psi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Así, aplicando los resultados expuestos en el apartado anterior y la ecuación (B-2), la ecuación (B-9) se convierte en

$$\int_V \Phi (\nabla_0^2 \Psi + k^2 \Psi) dV = 4\pi \Phi(\mathbf{x}) = \int_S (\Phi \nabla_0 \Psi - \Psi \nabla_0 \Phi) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{B-10})$$

Expresando el operador gradiente como $\nabla = \partial/\partial n$, tomando positiva la normal exterior a la superficie, y sustituyendo la expresión de Ψ , se tiene

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_S \left(\Phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (\text{B-11})$$

A continuación, se divide la superficie en extradós e intradós ($z_0 = 0^\pm$), esto es $S = S_e + S_i$. Además, en un cuerpo esbelto (caso de un ala), la normal exterior se puede aproximar por $\mathbf{n}_{e,i} \approx \pm \mathbf{e}_{z0}$ respectivamente. Aplicando que la velocidad vertical debe ser continua en todo el dominio, esto es $\frac{\partial \Phi_e}{\partial z_0} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_0}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi} \left[\int_{S_e} \left(\Phi_e \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial z_0} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} dS - \int_{S_i} \left(\Phi_i \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_0} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} dS \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \Delta \Phi \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS,\end{aligned}\quad (\text{B-12})$$

donde $\Delta \Phi = \Phi_i - \Phi_e$. Identificando Φ con ϕ_0^* , aplicando la definición de $\bar{\phi}$ (2-46) y tomando la forma en planta del ala, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_0(\mathbf{x}) &= \exp \left(i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x \right) \phi_0^*(x, y, z) = \\ &= \frac{\exp \left(i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x \right)}{4\pi} \int_{FP} \Delta \bar{\phi}_0 \exp \left(-i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x_0 \right) \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS.\end{aligned}\quad (\text{B-13})$$

Por otro lado, expresando la ecuación (2-21) en el dominio de la frecuencia

$$p = \Re(\bar{p} e^{i\omega t}), \quad (\text{B-14})$$

$$\bar{p} = -\rho_\infty \left(i\omega \bar{\phi} + U_\infty \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right), \quad (\text{B-15})$$

donde \bar{p} representa la amplitud compleja de p . Resolviendo la ecuación diferencial (B-15) por variación de parámetros, se tiene

$$\bar{\phi} = - \int_{-\infty}^x \frac{\bar{p}}{\rho_\infty U_\infty} \exp \left[i \frac{\omega}{U_\infty} (\lambda - x) \right] d\lambda. \quad (\text{B-16})$$

Identificando $\bar{\phi}_0$ con \bar{p} , y usando la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(x, y, z, \omega) &= - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^x \exp \left(i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} \lambda \right) \exp \left[i \frac{\omega}{U_\infty} (\lambda - x) \right] \\ &\cdot \int_{FP} \frac{\Delta \bar{p}}{\rho_\infty U_\infty} \exp \left(-i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} x_0 \right) \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS d\lambda.\end{aligned}\quad (\text{B-17})$$

Realizando el siguiente cambio de variable, $\xi = \lambda - x_0$, $d\xi = d\lambda$, e intercambiando el orden de integración con respecto a ξ y S , se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(x, y, z, \omega) &= - \frac{1}{4\pi} \int_{FP} \frac{\Delta \bar{p}(\mathbf{x}_0)}{\rho_\infty U_\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \exp \left(-i \frac{M^2}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} \xi \right) \exp \left(i \frac{\omega}{U_\infty} \xi \right) \right. \\ &\cdot \exp \left[-i \frac{\omega}{U_\infty} (x - x_0) \right] d\xi \Big\} dS = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int_{FP} \frac{\Delta \bar{p}(\mathbf{x}_0)}{\rho_\infty U_\infty} \exp \left[-i \frac{\omega}{U_\infty} (x - x_0) \right] \\ &\cdot \left\{ \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \left(i \frac{1}{1-M^2} \frac{\omega}{U_\infty} \xi \right) \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\xi \right\} dS.\end{aligned}\quad (\text{B-18})$$

ANEXO C. SINGULARIDAD DE LA FUNCIÓN KERNEL. APROXIMACIÓN UEDA – DOWELL

*La verdad es demasiado complicada como para
permitir nada más allá de meras aproximaciones.*

- John Von Neumann -

Como se ha mencionado anteriormente, la función B_R , y con ella $K(x_0, y_0)$, es fuertemente singular cuando $r \rightarrow 0$ y $X > 0$. Para ese caso, la integral (2-73) hay que resolverla en el sentido de las integrales impropias de Mangler [8]. Esto, en el sistema discretizado ya propuesto (Figura 2-7), en una región que verifique $r < \sigma, X > 0$ ¹³, sería lo siguiente.

$$\oint_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\sigma}^{-\epsilon} B_R(k, r, X) dy_0 + \int_{\epsilon}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 - \frac{4}{\epsilon} \right], \quad (C-1)$$

donde se ha aplicado que

$$B_R(k, r, X) = \int_{-\infty}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{3/2}} dv = \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{v}{r} \\ d\lambda = \frac{1}{r} dv \end{array} \right] = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\frac{X}{r}} \frac{\cos(k\lambda r)}{(\lambda^2 + 1)^{3/2}} d\lambda, \quad (C-2)$$

$$\begin{aligned} B_R(k, r \rightarrow 0, X) &\rightarrow \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^{3/2}} d\lambda = \left[\begin{array}{l} \lambda = \tan(u) \\ d\lambda = \frac{1}{u^2 + 1} du \end{array} \right]^{14} = \frac{1}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \right) - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \right) \right] = \frac{2}{r^2}, \end{aligned} \quad (C-3)$$

¹³ En este apartado siempre se considerará $X > 0$

¹⁴ $1/(u^2 + 1) = \sec^2(u)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} B_R(k, r \rightarrow 0, X) dy_0^{15} = -\frac{4}{\epsilon}. \quad (C-4)$$

Por otro lado, es fácil comprobar que

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{2}{r^2} dy_0 + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{2}{r^2} dy_0 = \frac{4}{\epsilon}, \quad (C-5)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 = 0. \quad (C-6)$$

De esta manera, introduciendo las relaciones (C-5) y (C-6) en la ecuación (C-1),

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & \left[\int_{-\sigma}^{-\epsilon} B_R(k, r, X) dy_0 + \int_{\epsilon}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 - \frac{4}{\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\sigma}^{-\epsilon} B_R(k, r, X) dy_0 + \int_{\epsilon}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{2}{r^2} dy_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{2}{r^2} dy_0 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\sigma}^{-\epsilon} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 + \int_{\epsilon}^{\sigma} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 \right\} - \frac{4}{\sigma}, \\ &\oint_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 - \frac{4}{\sigma}. \end{aligned} \quad (C-7)$$

La integral del término de la derecha tiene un valor finito, es decir, ya no es singular. Los valores que toma la función B_R para $X > 0$ pueden ser relacionados a los que toma la propia función para $X < 0$ haciendo uso de la Función de Bessel de segundo tipo modificada [22], $K_\nu(x)$ para el caso $\nu = 1$.

$$K_1(x) = \frac{2}{x} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dt, \quad (C-8)$$

donde $\Gamma(3/2)$ es la Función Gamma evaluada en $3/2$.

Así, para $X > 0$, se procede de la siguiente manera. Partiendo de la ecuación (2-73), dividiendo los intervalos de integración, se tiene

$$\begin{aligned} B_R(k, r, X) &= \int_{-\infty}^{-X} \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv + \int_{-X}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= - \int_{-\infty}^{-X} \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv + \int_{-X}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv + 2 \int_{-\infty}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (C-9)$$

La primera de las tres últimas integrales, I_1 , corresponde a la función $B_R(k, r, -X)$. La segunda, I_2 , se puede transformar, sin más que tener en cuenta que el integrando es una función par, en

¹⁵ $dy_0 = dr$

$$I_2 = \int_{-X}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv = 2 \int_0^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv. \quad (C-10)$$

La tercera, I_3 , se puede transformar mediante el cambio de variable $\xi = -v$, $d\xi = -dv$ en

$$I_3 = 2 \int_{-\infty}^X \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv = -2 \int_{\infty}^X \frac{\cos(k\xi)}{(\xi^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = 2 \int_X^{\infty} \frac{\cos(k\xi)}{(\xi^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi. \quad (C-11)$$

Sumando I_2 e I_3 , tomando de nuevo la variable de integración v para ambas integrales, se obtiene

$$I_2 + I_3 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv. \quad (C-12)$$

Aplicando el siguiente cambio de variable $v = tr$, $dv = r dt$, y comparando con (C-8), se obtiene

$$I_2 + I_3 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(kv)}{(v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dv = \frac{2}{r^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(krt)}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dt = 2 \frac{k}{r} K_1(kr). \quad (C-13)$$

Incluyendo los valores de I_1 , I_2 e I_3 en (C-9), se obtiene finalmente

$$B_R(k, r, X) = -B_R(k, r, -X) + 2 \frac{k}{r} K_1(kr). \quad (C-14)$$

Cabe destacar que cuando $r \rightarrow 0$, el segundo término tiende a $2/r^2$ tal y como aparece en (C-3). Sustituyendo en la ecuación (C-7), e integrando término a término, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 \\ &= - \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, -X) dy_0 - \frac{4}{\sigma} \\ &+ 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\sigma)^{2n+1}}{n! (n+1)! (2n+1)} \left[\ln\left(\frac{k\sigma}{2}\right) + \gamma - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \frac{4n+3}{2(2n+1)(n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (C-15)$$

Así, si $k\sigma \ll 1$, se pueden despreciar todos los términos de la serie a partir de $n = 1$ ¹⁶. La integral aproximada sería

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 &\approx - \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, -X) dy_0 - \frac{4}{\sigma} + 4k^2 \sigma \left[\ln\left(\frac{k\sigma}{2}\right) + \gamma - \frac{3}{2} \right] \\ &= \int_{-\sigma}^{\sigma} \left\{ -B_R(k, r, -X) - \frac{2}{\sigma^2} + k^2 \left[\ln\left(\frac{k\sigma_J}{2}\right) + \gamma - \frac{3}{2} \right] \right\} dy_0. \end{aligned} \quad (C-16)$$

Es decir, para incluir los efectos de integrar en el sentido de Mangler en el sistema discreto propuesto (paneles de ancho $2\sigma_J$ y puntos de centrado de dobletes (ξ_J, η_J)), el valor de la función B_R en la función Kernel debe ser remplazado por

$$B_R(k, r, X) \rightarrow -B_R(k, 0, -X) - \frac{2}{\sigma^2} + k^2 \left[\ln\left(\frac{k\sigma_J}{2}\right) + \gamma - \frac{3}{2} \right]. \quad (C-17)$$

¹⁶ Es decir, solo se tiene en cuenta el término $n = 0$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior representa el efecto de la herradura turbillonaria [2] en el método Vortex Lattice. Sin embargo, está sobreestimado el efecto de éstas en un sistema discretizado con dicha colocación. En la ecuación (C-7), el correspondiente término se puede considerar que cancela la cantidad

$$2 \int_{\sigma}^{\infty} \frac{2}{r^2} dr = \frac{4}{\sigma}. \quad (C-18)$$

Por otro lado, en un sistema discretizado, la integral del lado izquierdo de la ecuación anterior puede evaluarse sin más que hacer (Figura C-1)

$$2(2\sigma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m\sigma)^2} = \frac{\pi^2 4}{12\sigma}. \quad (C-19)$$

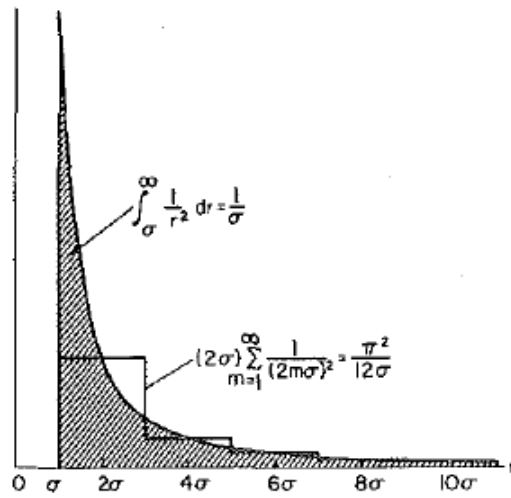


Figura C-1. Integral propuesta en (C-18) en un sistema continuo y discreto [7].

Introduciendo este cambio en la relación (C-17), se puede concluir que, cuando $r < \sigma_J$ y $X > 0$, el valor de la función B_R debería ser evaluado de la siguiente manera

$$B_R(k, r, X) \rightarrow -B_R(k, 0, -X) - \frac{\pi^2}{6\sigma_J^2} + k^2 \left[\ln \left(\frac{k\sigma_J}{2} \right) + \gamma - \frac{3}{2} \right]. \quad (C-20)$$

ANEXO D. CÓDIGOS MATLAB

En el presente apartado se incluirán las líneas fundamentales de código necesarias para la implementación del Doublet Point Method. Se omite el código referente a las figuras.

Doublet Point Method

```
%%%%%%%% DOUBLET POINT METHOD %%%%%%%%%

clear all,close all, clc,

%% Datos del aire

ainf = ; % Velocidad del sonido a la altura que se desee.
Minf = ; % Número de Mach
beta = sqrt(1-Minf^2); % Factor beta definido en los fundamentos teóricos
Uinf = Minf*ainf; % Velocidad de la corriente incidente

%% Geometría alar

S = ; % Superficie
E = ; % Estrechamiento
AR = ; % Alargamiento
psi = ; % Ángulo de flecha del borde de ataque (en grados)

% Número de paneles

Nx = ; % Número de paneles en la cuerda
Ny = ; % Número de paneles en la envergadura
Npan = Nx*Ny; % Número total de paneles con relación de alargamiento

% Geometría para ala rectangular, en flecha o hexagonal
```

```

b = sqrt(AR*S); % Envergadura
cr = 2*sqrt(S/AR)/(1+E); % Cuerda en la raíz
ct = E*cr; % cuerda en la punta
cm = cr/2; % cuerda media raíz
y(1:Ny+1) = -b/2+((1:(Ny+1))-1)*b/Ny; % vector de puntos de envergadura
xa(1:(Ny+1)) = abs(y)*tan(psi*pi/180); % Borde de ataque
xs(1:(Ny+1)) = cr+(b/2*tan(psi*pi/180)+ct-cr)/(b/2)*abs(y); % Borde de salida
cuerdam(1:Ny) = ((xs(2:Ny+1)+xs(1:Ny))/2-(xa(2:Ny+1)+xa(1:Ny))/2); % Cuerda
media de cada yj

% Panelado geométrico. Mallado

for cy = 1:(Ny+1)
    yv(1:(Nx+1),cy) = y(cy); % Para cada columna rellenamos por filas
    xv(1:(Nx+1),cy) = xa(cy)+((1:(Nx+1))-1)*(xs(cy)-xa(cy))/Nx;
end

% Adimensionalizamos

Yv = yv/cm;
Xv = xv/cm;
cuerdam = cuerdam/cm;

% Procedemos a nombrar los paneles con un solo número para facilitar luego el
subíndice de los paneles

for cy = 1:Ny
    for cx = 1:Nx
        I = (cy-1)*Nx+cx;
        % Numeramos dentro del panel los vértices empezando por el superior
        % izq y en el sentido de las agujas del reloj
        x1(I) = xv(cx,cy);          y1(I) = yv(cx,cy);
        x2(I) = xv(cx,cy+1);        y2(I) = yv(cx,cy+1);
        x3(I) = xv(cx+1,cy+1);      y3(I) = yv(cx+1,cy+1);
        x4(I) = xv(cx+1,cy);        y4(I) = yv(cx+1,cy);

        xe(I) = 0.5*cuerdam(cy); % Eje respecto al cual se general el momento
                                de balanceo
    end
end
sigma = (y2(1)-y1(1))/2; % 1/2 del ancho de cada panel (solo calculamos una
                        porque los paneles son de ancho constante)
Sp = 2*sigma*(x4-x1+x3-x2)/2;

%% Puntos de colocación y centrado

h(1:Npan) = (x4+x3)/2-(x2+x1)/2; % Cuerda media de cada panel

% Centrado de doblete

xi(1:Npan) = (x1+x2)/2+h/4;
eta(1:Npan) = (y1+y2)/2;

% Upwash point (w(x_i,y_i)). Punto de colocación

xcol(1:Npan) = (x1+x2)/2+3*h/4; %Punto de colocación a 3/4 de la cuerda media
de cada panel

```

```

ycol(1:Npan) = (y1+y2)/2;

%% Movimiento

porcentaje =; % Porcentaje para delimitar la amplitud mínima
N = ; % número de puntos para realizar la transformada de fourier
sf =; % Periodo
s = -sf/2:sf/N:sf/2-sf/N; % Vector de tiempo adimensional
ks = 2*pi*N/sf; % Frecuencia de muestreo
kv = (-N/2:N/2-1)*ks/N; % Intervalo de frecuencias

%% ESCALÓN: Tangente hiperbólica

epsilon = 0.01;
exc = 1/2*(1.001+tanh(s/epsilon))*5*pi/180;

%% Transformada de Fourier

texc = fft(exc,N)/N; % Transformada rápida de Fourier
texc = fftshift(texc); % Se ordena

%% Factores de Lanczos

nl = (-N/2:N/2-1);
x = nl*pi*2/N;
sigmaL(1:N/2) = sin(x(1:N/2))./x(1:N/2);
sigmaL(N/2+1) = 1;
sigmaL(N/2+2:N) = sin(x(N/2+2:N))./x(N/2+2:N);
sigmaL = sigmaL.^2; % Elevamos los factores al exponente deseado para eliminar
                    % las oscilaciones
texc = sigmaL.*texc; % Se multiplican los coeficientes de la transformada por
                    % estos factores

%% Filtro de frecuencias

numero = 0; % Indicador del número de coeficientes distintos de cero
for n = 1:N
    if abs(texc(n))>max(abs(texc))*porcentaje
        numero = numero+1;
    else
        texc(n) = 0;
    end
end
numero,

%% Ejecución del método DPM

CL_L = zeros(N,N); % Se inicializa el vector CL_L
for n = 1:N
    if abs(texc(n))>porcentaje*max(abs(texc))
        n,
        k = kv(n),
        %% Condición de contorno. Cambio de ángulo de ataque

        alpha0 = texc(n);
        % wb = -(1i*k*alpha0*(xcol-xe)'+alpha0); % Oscilando respecto a xe
        wb = -(1i*k*alpha0*(xcol)'+alpha0); % Oscilando respecto al borde de
                                                % ataque
    end
end

```

```

%% Variables del problema. Vectorización. Ecuaciones de apartado 3. DPM

x0m = xcol'*ones(1,Npan)-ones(Npan,1)*xi;
y0m = ycol'*ones(1,Npan)-ones(Npan,1)*eta;
rm = abs(y0m);
Rm = sqrt(x0m.^2+beta^2*rm.^2);
Xm = (x0m-Minf*Rm)/beta^2;

Bim = functionBi(abs(k),rm,Xm,Npan); % Definidas en el siguiente
                                     apartado
Brm = functionBr(abs(k),rm,Xm,sigma,Npan);
if k<0
    Bim = -Bim;
end
Bm = Brm+li*Bim;
Km= exp(-li*k*x0m).*(Minf*exp(li*k*Xm)./(Rm.*sqrt(Xm.^2+rm.^2))+Bm);
Dm = Sp'*ones(1,Npan).*Km/8/pi;
Psol(n,:) = (Dm\wb).';

CL_L(n,:) = real(sigmaL(n)*sum(Psol(n,:).*Sp)/sum(Sp)*exp(li*k*s));
end
end

%% Cálculo del coeficiente de sustentación en el tiempo con los factores de
Lanczos ya incluidos.

CLt_L = CL_L(1,:);
for n = 2:N
    CLt_L = CLt_L + CL_L(n,:);
end
CLt_L = fftshift(CLt_L); % Reordenamos la respuesta para que quede centrada en
                          0.

```

Funciones auxiliares: Br, Bi, U

```

function [Br] = functionBr(k,r,X,sigma,Npan)

euler = 0.5772156649; % Constante de Euler-Mascheroni
lim = 7; % Límite superior para el sumatorio
signo = ones(Npan,Npan); % Variable para signo de Br0
Br1 = zeros(Npan,Npan); % Variable para caso singular
Br0 = zeros(Npan,Npan); % Variable para caso común

%% SINGULARIDAD FUNCIÓN KERNEL. Ecuaciones descritas en el apartado 3.2.
Singularidad de la Función Kernel

if k==0
    a = -pi^2/6/sigma^2;
else
    a = -pi^2/6/sigma^2+k^2*(log(abs(k)*sigma/2)+euler-3/2);
end
for I=1:Npan
    for J=1:Npan
        if r(I,J)<sigma && X(I,J)>0
            Br1(I,J) = a;
            r(I,J)=0;
            X(I,J) = -X(I,J);
            signo(I,J) = -1;
        end
    end
end

```

```

end

%% BR Común

raiz = sqrt(X.^2+r.^2);
U0 = 1./raiz./(raiz-X);
alpha = U0;
beta0 = ones(Npan,Npan);
if k~=0
    par = 1/2-euler-log(abs(k)/2); % Paréntesis
else
    par = 0;
end
beta = beta0*par;

if k~=0
    for n = 1:lim
        U2n = functionU(2*n,k,r,X,Npan); % Función definida más adelante
        alpha = alpha+(-1)^n*U2n; % Primer término
        beta0 = (k*r/2).^(2*n)/(n+1)/(factorial(n)^2);
        par = sum(1./(1:n))+1/2/(n+1)-euler-log(abs(k)/2); % Paréntesis
        beta = beta+beta0*par; % Segundo término
    end
end
Br0 = alpha-k^2/2*beta;

Br = Br1+signo.*Br0; % Br total

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Bi] = functionBi(k,r,X,Npan)

lim = 7;
raiz = sqrt(X.^2+r.^2);
U1 = -k./raiz;
gamma = U1;
delta = ones(Npan,Npan);
for n = 1:lim
    U2nm1 = functionU(2*n+1,k,r,X,Npan); % Función definida más adelante
    gamma = gamma + (-1)^n*U2nm1; % Primer término
    delta = delta + (k*r/2).^(2*n)/(n+1)/(factorial(n))^2; % Segundo término
end

Bi = gamma+pi*k^2/4*delta;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Um]=functionU(m,k,r,X,Npan)

if k==0
    Um = zeros(Npan,Npan);
else
    raiz = sqrt(X.^2+r.^2);
    raizm1 =1./raiz;

    %% Pares

```

```

if mod(m,2)==0
    Um = -k^2/2.*(X.*raizml+log(raiz-X)); % U2
    if m>=3
        sv = 4:2:m;
        for c=1:length(sv)
            s=sv(c);
            Umm2 = Um;
            Um = k/(s-2)/factorial(s).*(k.*X).^ (s-1).*...
                raizml-...(k.*r).^2./s/(s-2).*Umm2;
        end
    end
end

%% Impares

else
    Um = -k.*raizml;
    if m>=3
        sv = 3:2:m;
        for c=1:length(sv)
            s=sv(c);
            Umm2 = Um;
            Um = k/(s-2)/factorial(s).*(k.*X).^ (s-1).* ...
                raizml-(k.*r).^2./s/(s-2).*Umm2;
        end
    end
end
end
end
end

```

REFERENCIAS

- [1] E. H. Dowell, R. Clark, D. Cox, H. C. Jr., J. W. Edwards, K. C. Hall, D. A. Peters, R. Scanlan, E. Simiu, F. Sisto y T. W. Strganac, *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, 2005.
- [2] M. C. Rico, Proyecto Fin de Carrera, Cálculo numérico del flujo potencial linealizado no estacionario sobre perfiles en los regímenes subsónico y supersónico, Sevilla: Escuela Superior de Ingeniería, 2015.
- [3] H. G. Küssner, *General Airfoil Theory*, NACA TM 979, 1940.
- [4] E. Albano y W. P. Rodden, A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows, *AIAA Journal*, 1969.
- [5] M. C. Rico, Numerical computation of the unsteady linearized potential flow past airfoils in compressible subsonic regime by finite differences methods, Sevilla: Escuela Superior de Ingeniería, 2016.
- [6] M. C. Rico y M. P.-S. Sánchez-Pastor, «An efficient finite differences method for the computation of compressible, subsonic, unsteady flows past airfoils and panels,» Sevilla, 2017.
- [7] T. Ueda y E. H. Dowell, A New Solution Method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow, *AIAA Journal*, 1982.
- [8] K. W. Mangler, Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics, A.R.C. Technical Report. National Aeronautical Establishment, 1952.
- [9] F. M. Soler, Trabajo Fin de Grado, Implementación del método Vortex-Lattice para el cálculo de la Aerodinámica no Estacionaria de alas en régimen incompresible, Sevilla: Escuela Superior de Ingeniería, 2016.
- [10] P. García-Fogeda y J. L. Díez, «Apuntes de Aeroelasticidad,» Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Madrid, 1992.
- [11] «The MathWorks, MATLAB,» [En línea]. Available: www.mathworks.com.
- [12] J. M. Almira, *Matemáticas para la recuperación de señales: una introducción*, Jaén: Grupo Editorial Universitario, 2005.
- [13] A. B. Ripoll y M. Pérez-Saborid, *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, McGraw-Hill.

- [14] R. Bisplinghoff, H. Ashley y R. Halfman, *Aeroelasticity*, Dover, 1996.
- [15] Ü. Gülçat, *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*, Istanbul, Turkey: Springer, 2016.
- [16] J. Katz y A. Plotkin, *Low speed aerodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- [17] M. Blair, «A compilation of the mathematics leading to the Doublet Lattice Method,» Wright Laboratory, 1992.
- [18] C. Lanczos, «*Applied Analysis*,» Dover Publications, Inc, New York, 1988.
- [19] R. Rodríguez-del-Río y E. Zuazua, «Series de Fourier y fenómeno de Gibbs,» Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense, Madrid, 2003.
- [20] M. P.-S. Sánchez-Pastor, *Clases de Aerodinámica II*, GIA, Sevilla: Escuela Superior de Ingeniería, 2016-2017.
- [21] «MathWorks,» [En línea]. Available: <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html>. [Último acceso: 15 06 2017].
- [22] «Wolfram,» Wolfram Research, Inc, [En línea]. Available: <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/>. [Último acceso: 08 05 2017].

